

مدرسة مصر الخير الإعدادية لجهينة - سوهاج

الترم  
الثاني

الصف الثالث الإعدادي

٢٠٢٠

إهداء إلى الطالبة



ملزمة  
الجبر والإحصاء



إعداد وتصميم

محمود عوض حسن

معلم أول رياضيات

انت أقوى من الجبر

# الفهرس

## ◆ الوحدة الأولى : المعادلات

- مراجعة على التحليل ..... ص ١
- حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين ..... ص ٢
- حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد ..... ص ٥
- حل معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية ..... ص ٨
- الحل البياني للمعادلات ..... ص ١١
- أسئلة اختر على الوحدة الأولى ..... ص ١٢

## ◆ الوحدة الثانية : الكسور الجبرية

- أصفار الدالة ..... ص ١٤
- مجال الدالة الكسرية ..... ص ١٥
- اختزال الكسر الجبري ..... ص ١٧
- تساوي كسرين جبريين ..... ص ١٨
- جمع وطرح الكسور الجبرية ..... ص ٢٠
- ضرب وقسمة الكسور الجبرية ..... ص ٢٣
- المعكوس الضربي للكسر الجبري ..... ص ٢٧
- أسئلة اختر على الوحدة الثانية ..... ص ٢٨

## ◆ الوحدة الثالثة : الإحصاء

- الاحتمال ..... ص ٣٠
- أسئلة اختر على الإحصاء ..... ص ٣٥
- أسئلة اختر تراكمي ..... ص ٣٦

## مراجعة على التحليل

### التحليل بإخراج العامل المشترك

تقنية  
معلم اول رياضيات

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= 2س - 2س \\ \dots\dots\dots &= 2س - 2س \\ \dots\dots\dots &= 2س - 6 \\ \dots\dots\dots &= 2س - 2س \\ \dots\dots\dots &= 2س - 18س \\ \dots\dots\dots &= 2س + 2س + 2س \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamondsuit 2س - 2س &= 2س (س - س) \\ \diamondsuit 2س - 18س &= 2س (س - 9س) \\ \diamondsuit 2س + 2س + 2س &= 2س (س + س + س) \\ \diamondsuit 2س - 6 &= 2س (س - 3س) \\ \diamondsuit 2س - 2س &= 2س (س - س) \\ \diamondsuit 2س - 18س &= 2س (س - 9س) \\ \diamondsuit 2س + 2س + 2س &= 2س (س + س + س) \end{aligned}$$

أعداد لها جذور تربيعية مثل:

49, 36, 25, 16, 9, 4, 1

### الفرق بين مربعين

هو عبارة عن حدين لهما جذور تربيعية وبينهم (-) مثل :  $2س - 2س$  ولو لقيت بينهم (+) ملوش تحليل

تحليل الفرق بين مربعين =  $(\sqrt{\text{الأول}} - \sqrt{\text{الثاني}}) (\sqrt{\text{الأول}} + \sqrt{\text{الثاني}})$

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= 9 - 2س \\ \dots\dots\dots &= 16 - 2س \\ \dots\dots\dots &= 36 - 2س \\ \dots\dots\dots &= 25 - 2س \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamondsuit 9 - 2س &= (3 + س) (3 - س) \\ \diamondsuit 16 - 2س &= (4 + س) (4 - س) \\ \diamondsuit 36 - 2س &= (6 + س) (6 - س) \\ \diamondsuit 25 - 2س &= (5 + س) (5 - س) \end{aligned}$$

الأعداد التي لها جذور تكعيبية مثل:

125, 64, 27, 8, 1

### مجموع مكعبين والفرق بينهما

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= 27 - 2س \\ \dots\dots\dots &= 8 + 2س \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamondsuit 27 - 2س &= (3 + س) (3 - س) \\ \diamondsuit 8 + 2س &= (2 + س) (2 - س) \end{aligned}$$

### تحليل المقدار الثلاثي البسيط $س^2 + ب س + ج$

قاعدة الإشارات: إذا كانت إشارة الأخير (+) يبقى الإشارتين زى إشارة الأوسط  
إذا كانت إشارة الأخير (-) يبقى الإشارتين مختلفتين والرقم الأكبر ياخذ إشارة الأوسط

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= 4س + 4س + 4س \\ \dots\dots\dots &= 9س - 2س + 6س \\ \dots\dots\dots &= 6س + 2س - 6س \\ \dots\dots\dots &= 1س - 2س + 1س \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamondsuit 4س + 4س + 4س &= (س + 4س) (س + 4س) \\ \diamondsuit 9س - 2س + 6س &= (س - 2س) (س + 6س) \\ \diamondsuit 6س + 2س - 6س &= (س + 2س) (س - 6س) \\ \diamondsuit 1س - 2س + 1س &= (س - 2س) (س + 1س) \end{aligned}$$



## حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين



إذا كان المعادلتين على الصورة :  $أ١س + ب١ص = ج١$  ،  $أ٢س + ب٢ص = ج٢$  فإن :

## ليس لهما حلول

$$\text{إذا كان } \frac{أ١}{ب١} = \frac{أ٢}{ب٢} \neq \frac{ج١}{ج٢}$$

أو المستقيمان متوازيان



م. ح =  $\Phi$   
عدد الحلول = ٠

## لهما عدد لا نهائي

$$\text{إذا كان } \frac{أ١}{ب١} = \frac{أ٢}{ب٢} = \frac{ج١}{ج٢}$$

أو المستقيمان منطبقان

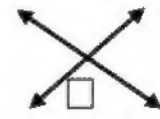


م. ح = { (س، ص) } : اكتب أي  
معادلة من الاثنين

## لهما حل وحيد

$$\text{إذا كان } \frac{أ١}{ب١} \neq \frac{أ٢}{ب٢}$$

أو: المستقيمان متقاطعان



عدد الحلول = ١  
م. ح = { (س، ص) }

## الحل الجبري بطريقة الحذف

١ اجعل المعادلتين على الصورة  $أ١س + ب١ص = ج١$  (الحد المطلق لوحده بعد =)

٢ خلى معاملات السينات متشابهة أو معاملات الصادات متشابهة (بضرب المعادلة كلها في رقم)

٣ اكتب المعادلتين في صورة أفقية تحت بعض (تأكد ان السينات تحت بعض والصادات تحت بعض وهكذا)

٤ لو المتشابهين ليهم نفس الإشارة اطرح المعادلتين ولو إشاراتهم مختلفة اجمع المعادلتين.

٥ هات قيمة المجهول وعوض عنها في أي معادلة هتجيبك قيمة المجهول الثاني.

## الحل الجبري بطريقة التعويض

١ من إحدى المعادلتين هات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص

٢ عوض في المعادلة الثانية بالقيمة اللى جبتها ٣ فك الأقواس واجمع المتشابه

٤ احسب قيمة المجهول وعوض بيها في أي معادلة هتجيبك قيمة المجهول الثاني

مثال على طريقة التعويض: حل المعادلتين  $س + ص = ٤$  ،  $س + ٢ص = ٥$

الحل  $س - ٤ = ص$  بالتعويض في الثانية  $٢ + (س - ٤) = ٥$   $س - ٨ + ٢ = ٥$   
 $٣ = س$   $٣ = س$  بالتعويض في الأولى  $٣ + ٢ص = ٥$   $١ = ٢ص$   $١ = ٣ - ٤ = ص$  م. ح = { (٣، ١) }

## أمثلة محلولة

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

$$2س - ص = 3 \quad , \quad 3س + 2ص = 4$$

الحل

بضرب المعادلة الأولى  $\times 2$ 

$$\begin{array}{r} 2س - ص = 3 \\ 3س + 2ص = 4 \\ \hline 10س = 10 \end{array}$$

بالتعويض في المعادلة الثانية  $2س = 3$  :

$$2س + 2ص = 4 \Rightarrow 2ص = 4 - 2س \Rightarrow 2ص = 4 - 3 \Rightarrow 2ص = 1 \Rightarrow ص = \frac{1}{2}$$

$$2س - \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow 2س = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow 2س = \frac{7}{2} \Rightarrow س = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \text{ح.م} = \left\{ \left( \frac{7}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

$$3س + 2ص = 4 \quad , \quad 2س - ص = 3$$

الحل

نظبط شكل المعادلة الثانية :  $2س - ص = 3$ بضرب المعادلة الثانية  $\times 3$ 

$$\begin{array}{r} 3س + 2ص = 4 \\ 6س - 3ص = 9 \\ \hline 10ص = 13 \end{array}$$

بالتعويض في المعادلة الثانية  $3س = 4$  :

$$3س + 2ص = 4 \Rightarrow 3س = 4 - 2ص \Rightarrow 3س = 4 - 2 \times \frac{13}{10} \Rightarrow 3س = \frac{40 - 26}{10} \Rightarrow 3س = \frac{14}{10} \Rightarrow س = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

$$2س - \frac{13}{10} = 3 \Rightarrow 2س = 3 + \frac{13}{10} \Rightarrow 2س = \frac{30 + 13}{10} \Rightarrow 2س = \frac{43}{10} \Rightarrow س = \frac{43}{20}$$

$$\therefore \text{ح.م} = \left\{ \left( \frac{7}{15}, \frac{13}{10} \right) \right\}$$

ملحوظة  
بجانبه

ما تطرح إطح الرقمين بإشارتهما : يعنى مثلا في مثال ٢ هتقول : ٦ - ٤  
نفس الكلام في الجمع ، خلاصة الكلام اتعامل مع الأرقام بإشاراتها

أوجد قيمتي أ، ب علما بأن (٣، ١) حلا للمعادلتين :

$$3س + 2ص = 17 \quad , \quad 2س - ص = 5$$

الحل

حل للمعادلة أ  $3س + 2ص = 17$  :نعوض عن س  $3 = 1$  ،  $2ص = 5$ 

$$3 \times 3 + 2ص = 17 \Rightarrow 9 + 2ص = 17 \Rightarrow 2ص = 17 - 9 \Rightarrow 2ص = 8 \Rightarrow ص = 4$$

حل للمعادلة ب  $2س - ص = 5$  :نعوض عن س  $3 = 1$  ،  $2ص = 5$ 

$$2 \times 3 - ص = 5 \Rightarrow 6 - ص = 5 \Rightarrow -ص = 5 - 6 \Rightarrow -ص = -1 \Rightarrow ص = 1$$

$$\begin{array}{r} 17 = 3س + 2ص \\ 13 = 3س - 2ص \\ \hline 4 = 4ص \end{array}$$

بالتعويض في ١

$$3س + 2 \times 1 = 17 \Rightarrow 3س = 17 - 2 \Rightarrow 3س = 15 \Rightarrow س = 5$$

$$2س - 1 = 5 \Rightarrow 2س = 5 + 1 \Rightarrow 2س = 6 \Rightarrow س = 3$$

مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم ،

فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم فأوجد مساحته.

الحل

نفرض أن الطول = س والعرض = ص

الطول يزيد عن العرض  $\therefore$  الطول - العرض = الزيادة

$$س - ص = 4$$

المحيط = ٢٨ ، محيط المستطيل =  $2(س + ص)$ 

$$2(س + ص) = 28 \Rightarrow س + ص = 14$$

$$س + ص = 14$$

$$\begin{array}{r} س - ص = 4 \\ س + ص = 14 \\ \hline 2س = 18 \end{array}$$

$$2س = 18 \Rightarrow س = 9$$

بالتعويض في س - ص = 4

$$9 - ص = 4 \Rightarrow ص = 9 - 4 \Rightarrow ص = 5$$

$$\text{المساحة} = \text{الطول} \times \text{العرض} = 9 \times 5 = 45 \text{ سم}^2$$



١ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

$$س + ٣ص = ٧ ، ٥س - ص = ٣$$

الحل

٢ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

$$٣س + ٤ص = ١١ ، ٢س + ص = ٤$$

الحل

٣ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

$$ص = ١ - ٢س ، ٢س + ٢ص = ٥$$

الحل

جرب تحلها بالطريقتين (الحذف والتعويض)

٤ زاويتان حادثتان في مثلث قائم الزاوية  
الفرق بين قياسيهما ٥٠ ، أوجد قياسيهما

الحل



## حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

إذا كانت المعادلة على الصورة :  $أس^2 + ب س + ج = ٠$  هنستخدم القانون العام:

### القانون العام



$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ ج}}{٢ أ}$$



أ : معامل  $س^2$   
ب : معامل  $س$   
ج : الحد المطلق

### خطوات حل المعادلة:

١ خلى المعادلة على الصورة  $أس + ب ص + ج = صفر$  ( وديهم كلهم قبل يساوى )

يعنى لو كانت كده :  $س^2 + ٥س + ٣ = ٠$  خليها كده :  $س^2 - ٥س - ٣ = ٠$

٢ خذ من المعادلة قيم أ ، ب ، ج بإشارتهم الموجودة في المعادلة

يعنى لو المعادلة كده  $س^2 - ٥س - ٣ = ٠$  يبقى أ = ١ ، ب = -٥ ، ج = -٣

٣ عوض في القانون العام عن قيم أ ، ب ، ج واحسب اللي تحت الجذر لحد ما يبقى رقم واحد بس

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٣^2 - ٤ \times (-٥) \times (-٣)}}{٢ \times ١} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٦٠}}{٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{-٥١}}{٢}$$

٤ افصل الناتج مرة بال ( + ) ومرة بال ( - ) واحسب القيمتين بالآلة الحاسبة

$$س = \frac{-٣ + \sqrt{-٥١}}{٢} = ٢,٥٤١ \quad و \quad س = \frac{-٣ - \sqrt{-٥١}}{٢} = -٠,٥٤١$$

٥ اكتب الناتجين في مجموعة الحل

$$س = \{ ٢,٥٤١ , -٠,٥٤١ \}$$



### ملاحظات

ملحوظة ١ : شايف - ب اللي فوق في القانون؟ دى معناها انك تعوض عن ب بس بإشارة مختلفة

ملحوظة ٢ : شايف ٢ اللي في المقام؟ شايفها؟ لا دى مفياهاش حاجة ، كويس انك شايفها

ملحوظة ٣ : إذا كان المميز  $ب^2 - ٤ أ ج < صفر$  (موجب) فإن المعادلة لها جذران

وإذا كان  $ب^2 - ٤ أ ج > صفر$  (سالب) فإن المعادلة ليس لها حلول ، أي م . ح =  $\emptyset$

وإذا كان  $ب^2 - ٤ أ ج = صفر$  فإن المعادلة لها جذر واحد ( أو جذران متساويان )



## أمثلة محلولة

١ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل

المعادلة الآتية في ح :  $س^2 - ٣س + ٥ = ١$   
مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين

الحل

$$\begin{aligned} ٣ &= أ \\ ٥ &= ب \\ ١ &= ج \end{aligned}$$



$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{١ \times ٣ \times ٤ - ٣^2}}{٣ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{١٢ - ٩}}{٦} = \frac{-٥ \pm \sqrt{٣}}{٦}$$

$$س = \frac{-٥ - \sqrt{٣}}{٦} \quad \text{أو} \quad س = \frac{-٥ + \sqrt{٣}}{٦}$$

$$س \approx -٠,٢٣ \quad \text{أو} \quad س \approx ١,٤٣$$

$$ح.م. = \{-٠,٢٣, ١,٤٣\}$$

٢ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة

$س^2 - ٤س + ١ = ٠$  مقرباً الناتج لرقمين عشريين

الحل

$$\begin{aligned} ١ &= أ \\ ٤ &= ب \\ ١ &= ج \end{aligned}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{١ \times ٤ \times ٤ - ٤^2}}{١ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ - ١٦}}{٢} = \frac{-٤ \pm ٠}{٢}$$

$$س = \frac{-٤ - ٠}{٢} \quad \text{أو} \quad س = \frac{-٤ + ٠}{٢}$$

$$س \approx -٠,٢٧ \quad \text{أو} \quad س \approx ٣,٧٣$$

$$ح.م. = \{-٠,٢٧, ٣,٧٣\}$$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة  $س(س - ١) = ٤$

باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لثلاثة أرقام

الحل

الأول لازم نضرب الـ س في القوس

$$س^2 - س = ٤ \quad \text{أو} \quad س^2 - س - ٤ = ٠$$

$$\begin{aligned} ١ &= أ \\ ١ &= ب \\ ٤ &= ج \end{aligned}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{١ \times ١ \times ٤ - ١^2}}{١ \times ٢}$$



$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{٤ - ١}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{٣}}{٢}$$

$$س = \frac{-١ - \sqrt{٣}}{٢} \quad \text{أو} \quad س = \frac{-١ + \sqrt{٣}}{٢}$$

$$س \approx -٠,٥٦٢ \quad \text{أو} \quad س \approx ٠,٥٦٢$$

$$ح.م. = \{-٠,٥٦٢, ٠,٥٦٢\}$$

٤ أوجد مجموعة حل المعادلة  $س(س - ٣) = ٥$

مقرباً الناتج لرقمين عشريين

الحل



الأول لازم نضرب الـ س في القوس

$$س^2 - ٣س = ٥ \quad \text{أو} \quad س^2 - ٣س - ٥ = ٠$$

$$س^2 - ٣س - ٥ = ٠$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ \times ١ \times ٤ - ٣^2}}{١ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٣٦ - ٩}}{٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٢٧}}{٢}$$

$$س = \frac{-٣ - \sqrt{٢٧}}{٢} \quad \text{أو} \quad س = \frac{-٣ + \sqrt{٢٧}}{٢}$$

$$س \approx -٠,٨٩ \quad \text{أو} \quad س \approx ١٠,١١$$

$$ح.م. = \{-٠,٨٩, ١٠,١١\}$$





## حل معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية



نصه  
مجموع عوض  
معلم اول رياضيات

- \* ابدأ بمعادلة الدرجة الأولى وهات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص
- \* عوض في معادلة الدرجة الثانية عن القيمة التي انت جبتها
- \* فك الأقواس
- \* جمع المتشابه ( وخلي المعادلة = 0 )
- \* التحليل (ولو لقيت رقم عامل مشترك اقسم عليه قبل التحليل)
- \* إما - أو ( وهات قيمتين للمجهول )
- \* عوض عن القيمتين في معادلة الدرجة الأولى وهات قيمتين للمجهول الثاني



### نوريب على فك الأقواس

$$\text{نوريب على فك الأقواس} \quad (س + 3)^2 = \text{مربع الأول} \pm \text{الأول} \times \text{الثاني} \times 2 + \text{مربع الثاني} = س^2 + 6س + 9$$

إشارة القوس

$$\dots\dots\dots = (س + 4)^2 \quad \leftarrow \quad \dots\dots\dots = (س - 1)^2$$

$$\text{نوريب على جمع المتشابه} \quad س(س + 3) = س^2 + 3س \quad \leftarrow \quad س(س - 3) = س^2 - 3س$$

$$\dots\dots\dots = (س - 5) \quad \leftarrow \quad \dots\dots\dots = (س + 1) \quad \leftarrow$$

### نوريب على جمع المتشابه

$$\dots\dots\dots = 25 - 2س + 1س^2 + 1$$

$$\dots\dots\dots = 2س^2 - 4س - 1$$

$$\dots\dots\dots = 2س^2 + 20س + 100 - 4س^2 - 20س + 25 = 2س^2 - 2س + 125$$

$$\dots\dots\dots = 2س^2 + 6س + 9 - 2س^2 - 3س - 13 = 3س - 4$$

$$\dots\dots\dots = 2س^2 + 2س + 1$$

ملحوظة : س ص = 9 هي معادلة من الدرجة الثانية وليست من الدرجة الأولى



١ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :  
 س - ص = ١ ، س + ص = ٢٥

**الحل** من معادلة الدرجة الأولى : س + ١ = ص

بالتعويض عن س = (١ + ص) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (١ + ص) + ص = ٢٥

نفك الأقواس

١ + ص + ص = ٢٥

نجمع المتشابه

١ + ٢ص = ٢٥

بالقسمة على ٢

ص + ١ = ١٢

بالتحليل

ص = ١٢ - ١ = ١١

أو ص = ٣ - ١ = ٢

∴ ص = ٣

إما ص + ١ = ١٢

∴ ص = ١١

**بالتعويض في المعادلة س + ١ = ص**

∴ ٣ + ١ = ص

∴ ص = ٤

∴ ١١ + ١ = ص

∴ ص = ١٢

م. ح = { (٣، ٤) ، (١١، ١٢) }

٢

أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

س - ص = ٢٧ ، س + ص = ٢٧

**الحل**

من معادلة الدرجة الأولى : س = ص

بالتعويض عن س = ص في معادلة الدرجة الثانية

∴ ص + ص = ٢٧

نجمع المتشابه

٢ص = ٢٧

بالقسمة على ٢

ص = ١٣.٥

بالتحليل

ص = ١٣.٥

إما ص + ١ = ٢٧

أو ص = ٢٦

∴ ص = ٢٦

**بالتعويض في المعادلة س - ص = ٢٧**

∴ ٢٦ - ص = ٢٧

∴ ص = -١

∴ ص = -١

م. ح = { (-١، ٢٦) ، (٢٦، -١) }

٣

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

س - ٢ص = ١ ، س + ٢ص = ١٠

**الحل**

من معادلة الدرجة الأولى : س = ١ + ٢ص

بالتعويض عن س = (١ + ٢ص) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (١ + ٢ص) + ٢ص = ١٠

نفك الأقواس

١ + ٢ص + ٢ص = ١٠

نجمع المتشابه

١ + ٤ص = ١٠

بالتحليل

٤ص = ١٠ - ١ = ٩

ص = ٩ / ٤ = ٢.٢٥

أو ص = ١ - ١ = ٠

∴ ص = ٠

إما ص + ١ = ١٠

∴ ص = ٩

**بالتعويض في المعادلة س + ٢ص = ١٠**

∴ ٠ + ٢(٩) = ١٠

∴ ١٨ = ١٠

∴ ٩ + ٢(٠) = ١٠

∴ ٩ = ١٠

م. ح = { (٠، ٩) ، (٩، ٠) }

٤

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

س - ٢ص = ١٠ ، س + ٢ص = ٥٢

**الحل**

من معادلة الدرجة الأولى : س = ١٠ + ٢ص

بالتعويض عن س = (١٠ + ٢ص) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (١٠ + ٢ص) + ٢ص = ٥٢

١٠ + ٢ص + ٢ص = ٥٢

نجمع المتشابه

١٠ + ٤ص = ٥٢

بالقسمة على ٤

٤ص = ٥٢ - ١٠ = ٤٢

ص = ٤٢ / ٤ = ١٠.٥

ص = ١٠.٥

إما ص + ١ = ١٠

أو ص = ٩

∴ ص = ٩

**بالتعويض في المعادلة س - ٢ص = ١٠**

∴ ٩ - ٢(١٠.٥) = ١٠

∴ ٩ - ٢١ = ١٠

∴ -١٢ = ١٠

م. ح = { (٩، ١٠.٥) ، (١٠.٥، ٩) }

١ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين

$$\text{ص} - \text{س} = 3, \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} \text{ص} = 13$$

الحل

من معادلة الدرجة الأولى :  
بالتعويض في معادلة الدرجة الثانية

∴

نفك الأقواس

نجمع المتشابه

بالتحليل

إما	أو
.....	.....
∴	∴
بالتعويض في	
∴	∴
.....	
∴ م. ح = { (1, 4), (-1, -4) }	

٢ مستطيل محيطه ١٤ سم ومساحته ١٢ سم<sup>٢</sup>

أوجد كلا من بعديه

الحل

نفرض أن بُعدا المستطيل هما س ، ص

∴ محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

$$\therefore 14 = 2(\text{س} + \text{ص}) \quad \text{بالقسمة على ٢}$$

$$\text{س} + \text{ص} = 7 \quad \text{ومنها} \quad \underline{\text{ص} = 7 - \text{س}}$$

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض ∴ س ص = ١٢

بالتعويض عن ص = ٧ - س في المعادلة س ص = ١٢

$$\therefore \text{س} (7 - \text{س}) = 12 \quad 7\text{س} - \text{س}^2 = 12$$

٧س - س<sup>٢</sup> = ١٢ = ٠ نرتب ونغير إشارة الكل

$$\text{س}^2 - 7\text{س} + 12 = 0 \quad \text{س}^2 - (٣ + ٤) \text{س} + ١٢ = 0$$

$$\text{إما} \text{س} = ٤ \quad \text{∴} \text{ص} = 7 - ٤ = ٣$$

$$\text{أو} \text{س} = ٣ \quad \text{∴} \text{ص} = 7 - ٣ = ٤$$

∴ بعدا المستطيل هما ٣ سم ، ٤ سم

٣ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

$$\text{ص} - \text{س} = 2, \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} \text{ص} = 4$$

الحل

٤ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

$$\text{س} + \text{ص} = 5, \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} \text{ص} = 15$$

الحل



## الحل البياني للمعادلات

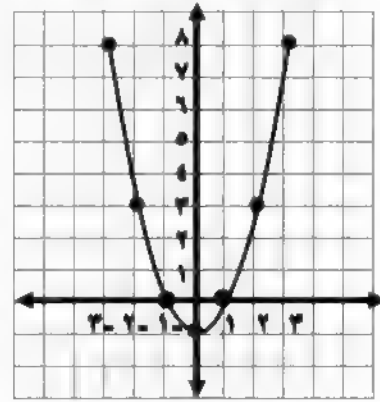
١ ارسم الشكل البياني للدالة : د(س) = س<sup>2</sup> - ١

في الفترة [-٣ ، ٣]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س<sup>2</sup> - ١ = ٠

الحل

س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ص	٨	٣	٠	١-	٠	٣	٨



ح.م = { ١ ، ١- }

نفس خطوات تمثيل الدالة التربيعية

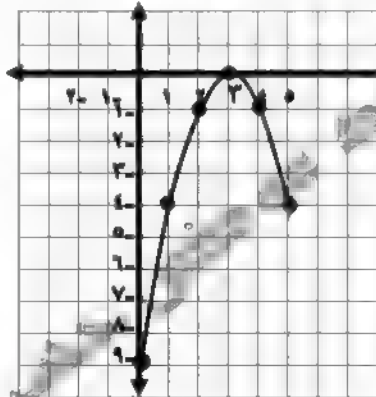
٢ ارسم الشكل البياني للدالة

د(س) = س<sup>2</sup> - ٩ في الفترة [-٥ ، ٥]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

الحل

س	٥	٤	٣	٢	١	٠
ص	٤-	١-	٠	١-	٤-	٩-



ح.م = { ٣ }

نصه محمود عوض  
معلم اول رياضيات

### ملاحظات على الحل البياني

◆ مجموعة حل معادلة من الدرجة الثانية بيانيا هي :

قيم س التي يقطعها المنحنى من محور السينات

◆ إذا لم يقطع المنحنى محور السينات فإن ح.م = ∅

◆ مجموعة حل معادلتين من الدرجة الأولى بيانيا هي :

نقطة تقاطع المستقيمين

◆ إذا توازى المستقيمان فإن ح.م = ∅

◆ إذا انطبق المستقيمان فإن مجموعة الحل هي :

{ (س ، ص) : واكتب أي معادلة من الاثنين }

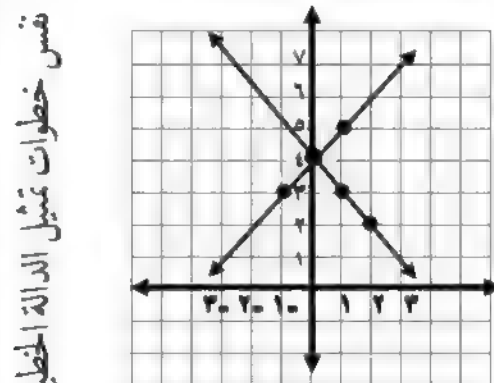
٣ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين بيانيا :

ص = س + ٤ ، س + ٤ = ص

الحل

ص = س + ٤ ، ص - ٤ = س

س	١	٠	١-
ص	٥	٤	٣



ح.م = { (٤ ، ٠) }

نفس خطوات تمثيل الدالة الخطية

نصه محمود عوض  
معلم اول رياضيات

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

٩ إذا كان المستقيمان  $s + 3v = 4$  ،  $s + v = 7$  متوازيين فإن  $.....$

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٧



## الواجب المنزلي

### الدرس الأول: حل معادلتين من الدرجة الأولى

- ١ أوجد في ح' مجموعة حل المعادلتين  $س + ٢ص = ٨$  ،  $٣س + ص = ٩$
- ٢ أوجد في ح'  $ح \times ح$  مجموعة حل المعادلتين  $٢س + ص = ١$  ،  $٥ = ٢ص + س$
- ٣ أوجد في ح'  $ح \times ح$  مجموعة حل المعادلتين  $س = ص + ٤$  ،  $٧ = ٢ص + ٣س$
- ٤ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم فإذا كان محيطه ٢٢ سم فأوجد مساحته.
- ٥ أوجد بيانيا مجموعة حل المعادلتين  $ص = ٢س - ٣$  ،  $٤ = ٢ص + س$

### الدرس الثاني: القانون العام

- ١ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة  $س' - ٢س - ٦ = ٠$  مقربا الناتج لرقم عشري واحد.
- ٢ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة  $٣س' - ٦س + ٦ = ٠$  مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية
- ٣ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث  $د(س) = س' - ٢س - ٤$  في الفترة  $[-٢ ، ٤]$  ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة  $س' - ٢س - ٤ = ٠$

### الدرس الثالث: حل معادلتين إحداها من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية

- ١ أوجد في ح'  $ح \times ح$  مجموعة حل المعادلتين  $س - ص = ٢$  ،  $٢٠ = ٢ص + س'$
- ٢ أوجد في ح'  $ح \times ح$  مجموعة حل المعادلتين  $٤ = ٢ص + س$  ،  $٧ = ٢ص + س + ص$
- ٣ عددان مجموعهما ٩٠ وحاصل ضربيهما ٢٠٠٠ أوجد العددين
- ٤ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم<sup>٢</sup> أوجد محيطه.
- ٥ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوي ٣٠ سم أوجد طولى ضلعي القائمة



## أصفار الدالة



\* لإيجاد أصفار الدالة نساوى الدالة بالصفر ونحل المعادلة

مثال: إذا كانت  $D = (S)$   $S^2 - 9 = 0$  فابجد أصفار الدالة  
الحل:  $S^2 - 9 = 0 \Rightarrow S^2 = 9 \Rightarrow S = \pm 3 \Rightarrow S = 3, -3$

\* لو كانت  $D = (S)$  صفر فإن  $S = (D)$

\* أصفار الكسر الجبرى = أصفار البسط - أصفار المقام  
( يعنى الذى موجود فى أصفار البسط ومث متكرر فى أصفار المقام )

## الدوال التى أصفارها $\Phi$

\*  $(S^2 + 4S + 4)$  ملوش أصفار: زى  $S^2 + 4S + 4$  أو  $S^2 + 3 + 4$  وهكذا  $\Phi = (D)$

\* فى مجموع المكعبف والفرفق بفنفهما: القوس الكبفر ملوش أصفار  $\Phi = (D)$

\* لو كانت  $D = (S)$  أى عءء (ما عءا الصفر) زى  $D = (S)$   $3 = 3$  فإن  $\Phi = (D)$

تءرفب: أوفء بمجموعء أصفارف كل من الدوال الآففة:

١) $D = (S)$ $S^2 - 18S = 0$	٢) $D = (S)$ $S^2 + 2S - 15 = 0$	٣) $D = (S)$ $2S^2 + 16 = 0$
الحل: .....	الحل: .....	الحل: .....
ص (د) = .....	ص (د) = .....	ص (د) = .....

ملحوظة: لو أعطاك أصفار الدالة معلومة فى المسألة عوض بففها فى الدالة وسافى الدالة بالصفر

إذا كانت  $D = (S)$   $S^3 - 2S^2 - 75 = 0$   
فأفبء أن العءء ٥ أءء أصفارف هءة الدالة

الحل بالتعوفض فى الدالة عن  $S = 5$

$$\begin{aligned} 0 &= S^3 - 2S^2 - 75 \\ 0 &= 5^3 - 2 \times 5^2 - 75 \\ 0 &= 125 - 50 - 75 \end{aligned}$$

$\therefore D = (5)$   $\therefore$  العءء ٥ أءء أصفارف الدالة

إذا كانت  $D = (S)$   $S^2 + 1 = 0$  فابجد قفمة ١

الحل  $\therefore \{ -1, 1 \}$  هى بمجموعء أصفارف الدالة

$\therefore$  أى قفمة من هءة القفم فءفل  $D = (S)$   $0 =$

$$0 = 1^2 + 1$$

$$0 = 1 + 1 \quad \therefore 1 = -1$$





دالة الكسر الجبري : يرمز لها بالرمز  $\frac{د(س)}{ق(س)}$  وهي دالة على صورة  $\frac{د(س)}{ق(س)}$

مثل :  $\frac{س + ٥}{٣} = (س)$  ،  $\frac{س^٢}{٨ + س^٢} = (س)$  ،  $\frac{س - ٣}{١٢ + س - ٧} = (س)$

نصه  
معلم اول رياضيات  
يم

- ◆ مجال الكسر الجبري = ح - أصفار المقام  
مثال : إذا كان  $\frac{س - ١}{س - ٣} = (س)$  فإن مجال  $ح = س - ٣$
- ◆ المجال المشترك لعدة كسور جبرية = ح - مجموعة أصفار المقامات  
مثال : إذا كان  $\frac{س}{س - ١} = (س)$  ،  $\frac{س + ٣}{(س - ٥)(س + ٧)} = (س)$  فإن المجال المشترك لكل من  $س - ١$  ،  $س + ٣$  ،  $(س - ٥)(س + ٧)$  هو  $ح = س - ١ ، س + ٣ ، (س - ٥)(س + ٧)$
- ◆ ملحوظة : قبل إخراج المجال حلل المقام لو ليه تحليل .

نصه  
معلم اول رياضيات  
يم

تدريب ١ : عيّن مجال كل من الدوال الكسرية الآتية :

٣  $\frac{س - ١}{س^٢ + س - ٢} = (س)$  الحل

٢  $\frac{س - ٢}{س^٢} = (س)$  الحل

١  $\frac{س + ٥}{٣} = (س)$  الحل

المقام عدد يبقى ملوش أصفار

المجال = ح

٦  $\frac{س + ١}{س^٤ - ٩} = (س)$  الحل

٥  $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٤} = (س)$  الحل

٤  $\frac{س + ١}{س^٤ - س} = (س)$  الحل

تدريب ٢ : عيّن المجال المشترك لكل من الدوال الكسرية الآتية :

٢  $\frac{س + ١}{س^٣ - ٧} = (س)$  ،  $\frac{س + ١}{س^٣ - ٨١} = (س)$  الحل

١  $\frac{س + ٥}{س^٢ + س - ٢٠} = (س)$  ،  $\frac{س - ١}{س^٢ - ١٦} = (س)$  الحل

أمثلة وتدريبات على الأصفار والمجال

٢ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة  $\frac{س - ١}{س^٢ - ٩}$  هي  $\{٣\}$  فأوجد قيمة أ

الحل

∴ المجال = ح -  $\{٣\}$

∴ أصفار المقام = ٣

بالتعويض عن س = ٣ ونساوى المقام بالصفر

$$٠ = ٩ + ٣ \times ١ - ٩$$

$$٠ = ٩ + ٣ - ٩$$

$$٠ = ٣ - ١٨$$

$$١٨ = ٣$$

$$٦ = ١$$

٤ إذا كان مجال الدالة  $\frac{س + ٥}{س^٢ - ١}$  هو ح -  $\{٢، -٢\}$  فأوجد قيمة أ

الحل

٦ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة  $\frac{٩}{س + ١} + \frac{ب}{س} = (س)$  هي  $\{٥\}$  ومجالها هو ح -  $\{٣\}$  فأوجد قيمتي أ، ب

∴ المجال = ح -  $\{٣\}$  ∴ أصفار المقام الثاني = ٤

$$٤ = ١ + ٣ \quad \therefore ٤ = ١$$

$$\therefore (س) = \frac{٩}{س} + \frac{ب}{س} = \frac{٩ + ب}{س}$$

$$\therefore (س) = ٥ \quad \therefore ٥ = \frac{٩}{٤ - ٥} + \frac{ب}{٥}$$

$$\frac{ب}{٥} = ٩ + ٢ \quad \therefore \frac{ب}{٥} = ١١ \quad \therefore ب = ٥٥$$

١ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة  $\frac{١٥ + ب + س}{س} = (س)$  هي  $\{٥، ٣\}$  فأوجد قيمة كل من أ، ب

$$\therefore (٣) = ٠ \quad \therefore ٠ = ١٥ + ٣ + ١ - ٩ \quad \therefore ٠ = ١٥ + ٣ - ٩$$

$$١٠ = ١٥ + ٣ - ٩$$

$$\therefore (٥) = ٠ \quad \therefore ٠ = ١٥ + ٥ + ١ - ٢٥ \quad \therefore ٠ = ١٥ + ٥ - ٢٥$$

$$١٠ = ١٥ + ٥ - ٢٥$$

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

$$\begin{array}{r} ١٠ = ١٥ + ٥ - ٢٥ \\ ١٠ = ١٥ + ٣ - ٩ \end{array}$$

$$\therefore ١٠ = ١٥ + ٣ - ٩$$

$$\text{بالتعويض في ١} \quad \therefore ١٠ = ١٥ + ٣ - ٩ \quad \therefore ١٠ = ١٥ + ٣ - ٩$$

٣ إذا كانت  $\{٥، -٣\}$  هي مجموعة أصفار الدالة  $\frac{س - ٢}{س} = (س)$  فأوجد قيمة أ

الحل

٥ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة  $\frac{س - ١}{س + ب} = (س)$  هي  $\{٥\}$  ومجالها هو ح -  $\{٣\}$  فأوجد قيمتي كل من أ، ب

الحل

∴ أصفار الكسر الجبري =  $\{٥\}$

∴ أصفار البسط =  $\{٥\}$

$$٥ = ١ - ١ \quad \therefore ٥ = ١ - ١$$

∴ المجال = ح -  $\{٣\}$  ∴ أصفار المقام = ٣

$$٣ = ١ + ٢ \quad \therefore ٣ = ١ + ٢$$

# اختزال الكسر الجبري



نصه مهمه و عوَض  
معلم اول رياضيات



تحليل البسط والمقام

تحليل

إخراج المجال = ح - أصفار المقام

مجال

حذف العوامل المتشابهة بين البسط والمقام

حذف

فقران الاختزال والكسر الجبري

## تدريب ١

$$\frac{s^3 - 1}{s^3 + s^2 + s} = \text{اختصر لأبسط صورة ن(س)}$$

الحل

التحليل: .....

المجال: .....

الحذف: .....

## مثال

$$\frac{s^3 - 1}{s^3 + s^2 + s - 5} = \text{اختصر لأبسط صورة ن(س)}$$

الحل

$$\frac{(s-1)(s^2+s+1)}{(s-1)(s^2+s+5)} = \text{ن(س)}$$

المجال: ح - { ١ ، ٥ }

$$\frac{s+1}{s+5} = \text{ن(س)}$$

## تدريب ٣

$$\frac{s^2 - 6s + 9}{s^2 - 18s + 81} = \text{اختصر لأبسط صورة ن(س)}$$

الحل

## تدريب ٢

$$\frac{s^2 - 4}{s^2 - 8} = \text{اختصر لأبسط صورة ن(س)}$$

الحل



# تساوى كسرين جبريين



إعداد / محمود عوض حسن

## لوعايز تعرف هل : $n_1 = n_2$ أم لا اتبع الآتى :

- اختصر كل كسر لوحده بالخطوات الثلاثة (تحليل - مجال - حذف)
- $n_1 = n_2$  إذا تحقق شرطان معًا وهما : ① مجال  $n_1$  = مجال  $n_2$  ②  $n_1(s) = n_2(s)$  بعد الاختصار النهائي
- لوقيت مجال  $n_1 =$  مجال  $n_2$  بينما  $n_1(s) \neq n_2(s)$  فإن  $n_1 \neq n_2$
- لوقيت  $n_1(s) = n_2(s)$  بينما مجال  $n_1 \neq$  مجال  $n_2$  فإن  $n_1 \neq n_2$
- ولكن في حالة اختلاف المجالين يكون  $n_1 = n_2$  في المجال المشترك فقط

### مثال ٢

نصمعه عوض  
معلم اول رياضيات

### مثال ١

أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه  $n_1$  ،  $n_2$  حيث :

$$\frac{n_1(s)}{n_2(s)} = \frac{12 + s + s^2}{4 + s + s^2} \quad \frac{n_2(s)}{n_1(s)} = \frac{3 - s - s^2}{1 + s + s^2}$$

الحل

$$\frac{(3 - s - s^2)(4 + s)}{(1 + s)(4 + s)} = \frac{12 + s + s^2}{4 + s + s^2} = \frac{n_1(s)}{n_2(s)}$$

مجال  $n_1$  = ح - { -4 ، -1 }

$$\frac{3 - s}{1 + s} = \frac{n_1(s)}{n_2(s)}$$

$$\frac{(3 - s)(1 + s)}{(1 + s)(1 + s)} = \frac{3 - s - s^2}{1 + s + s^2} = \frac{n_2(s)}{n_1(s)}$$

مجال  $n_2$  = ح - { -1 }

$$\frac{3 - s}{1 + s} = \frac{n_2(s)}{n_1(s)}$$

$\therefore n_1(s) = n_2(s)$  بينما مجال  $n_1 \neq$  مجال  $n_2$

$\therefore n_1 = n_2$  في المجال المشترك ح - { -4 ، -1 }

$$\text{إذا كان } n_1(s) = \frac{s^3 - s^2 - 3s}{s^3 - s^2 - 3s} \quad n_2(s) = \frac{s^3 + s^2 + s}{s^3 - s^2 - 3s} \quad \text{اثبت أن: } n_1 = n_2$$

الحل

$$\frac{s^3 - s^2 - 3s}{(1 - s)^2} = \frac{s^3 - s^2 - 3s}{s^3 - s^2 - 3s} = \frac{n_1(s)}{n_2(s)}$$

مجال  $n_1$  = ح - { 0 ، 1 }

$$\frac{1}{1 - s} = \frac{n_1(s)}{n_2(s)}$$

$$\frac{s(s^2 + s + 1)}{(1 - s)^2} = \frac{s^3 + s^2 + s}{s^3 - s^2 - 3s} = \frac{n_2(s)}{n_1(s)}$$

مجال  $n_2$  = ح - { 0 ، 1 }

$$\frac{1}{1 - s} = \frac{n_2(s)}{n_1(s)}$$

$\therefore n_1(s) = n_2(s)$  ، مجال  $n_1 =$  مجال  $n_2$

$\therefore n_1 = n_2$

١

$$\text{إذا كان } (س) = \frac{س^2}{س^2 + ٨}$$

$$\text{ن} = (س) = \frac{س^2 + ٤س}{س^2 + ٨س + ١٦} \text{ أثبت أن : } ن = ١$$

الحل

٢

$$\text{إذا كان } (س) = \frac{س^2 + ٦س}{(س + ٣)(س - ١)} \text{ ، } (س) = \frac{س^2}{س - ١}$$

بين إذا كان  $ن = ١$  أم لا ؟ مع ذكر السبب

الحل

٣

أوجد المجال المشترك الذي تتساوى فيه الدالتان:

$$ن = (س) = \frac{س^2 + ٩س + ٢٠}{س^2 - ١٦} \text{ ، } (س) = \frac{س + ٥}{س^2 - ٤}$$

الحل

٤

$$\text{إذا كان } (س) = \frac{س^2 - ٤}{س^2 + ٦س - ٦}$$

ن = (س) =  $\frac{س^2 - ٦س - ٦}{س^2 - ٩س}$  أثبت أن:  $ن = ١$  (س) =  $ن = ١$  (س)  
لجميع قيم س التي تنتمي إلى المجال المشترك ، وأوجد هذا المجال

الحل

$$(س) = \frac{س^2 - ٤}{س^2 + ٦س - ٦} = \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)(س + ٣)}$$

$$\frac{س + ٢}{س + ٣} = (س) \text{ ، } (س) = \frac{س + ٢}{س + ٣} \text{ مجال } ن = ١ \text{ ح } - \{ ٢ ، ٣ - \}$$

$$(س) = \frac{س^2 - ٦س - ٦}{س^2 - ٩س} = \frac{س(س - ٦ - ٦/س)}{س(س - ٩)} = \frac{س(س - ٦)(س + ١)}{س(س - ٩)}$$

$$= \frac{(س + ١)(س - ٦)}{(س - ٩)(س + ١)}$$

$$\frac{س + ١}{س - ٩} = (س) \text{ ، } (س) = \frac{س + ١}{س - ٩} \text{ مجال } ن = ١ \text{ ح } - \{ ٣ ، ٠ ، ٣ - \}$$

∴  $(س) = (س) = ١$  بينما مجال  $ن = ١ \neq$  مجال  $ن = ١$

∴  $(س) = (س) = ١$  فقط في المجال المشترك

$$\text{ح } - \{ ٣ ، ٠ ، ٢ ، ٣ - \}$$

# جمع وطرح الكسور الجبرية



إعداد / محمود عوض

## الخطوات:

- ١ ترتيب حدود المقادير (يعني ١٥ - ١٣ س + ٢ س<sup>٢</sup> رتبة بإشاراته وخليه كده ٢ س<sup>٢</sup> - ١٣ س + ١٥)
- ٢ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن
- ٣ إخراج المجال المشترك (ح - أصفار المقامات)
- ٤ حذف العوامل المتشابهة في كل كسر لوحده (إعني تحذف قوس من الكسر الأول مع قوس من الكسر الثاني)
- ٥ لو لقيت المقامات موحدة : خذ مقام منهم وإجمع البسطين أو اطرحهم (حسب العملية).

$$\text{زى كده : } \frac{3 + \text{س}}{2 + \text{س}} = \frac{3}{2 + \text{س}} + \frac{\text{س}}{2 + \text{س}}$$

لو المقامات غير موحدة : وحد المقامات كالتالى :

شوف إيه اللي موجود في مقام الأول ومش موجود في مقام التاني واضربه × الكسر التاني كله (بسطة ومقام)  
وشوف إيه اللي موجود في مقام التاني ومش موجود في مقام الأول واضربه × الكسر التاني كله (بسطة ومقام)

$$\text{زى كده : } \frac{3 + \text{س}}{(2 - \text{س})(3 - \text{س})} + \frac{\text{س}}{2 - \text{س}}$$



$$\text{هيبقى كده : } \frac{3 + \text{س}}{(2 - \text{س})(3 - \text{س})} + \frac{\text{س}(3 - \text{س})}{(3 - \text{س})(2 - \text{س})}$$

$$\text{أو كده : } \frac{1}{1 - \text{س}} + \frac{\text{س}}{1 + \text{س}}$$

$$\text{هيبقى كده : } \frac{1 + \text{س}}{(1 + \text{س})(1 - \text{س})} + \frac{\text{س}(1 - \text{س})}{(1 - \text{س})(1 + \text{س})}$$

٦ اجمع المتشابه في البسط ولو نفع يتحلل حله و ضع المقدار في أبسط صورة

$$\text{فمثلا : } \frac{1 + \text{س}}{2 - \text{س}} = \frac{(1 + \text{س})(3 - \text{س})}{(3 - \text{س})(2 - \text{س})} = \frac{3 + 2\text{س} - \text{س}^2}{(3 - \text{س})(2 - \text{س})} = \frac{3 + \text{س} + \text{س}^3 - \text{س}^2}{(3 - \text{س})(2 - \text{س})}$$

لو لقيت مقدار فيه حدين مطروحين ومش مرتب

$$\begin{array}{ll} \text{زى كده} & 3 - \text{س} \\ \text{أو كده} & 1 - \text{س}^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{هنخليه كده} \\ \text{هنخليه كده} \end{array} \quad \begin{array}{l} (3 - \text{س}) - \\ (1 - \text{س}^2) - \end{array}$$

ملحوظة هامة



## أمثلة محلولة

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{3-س}{4} - \frac{س-٢}{١٢+س} = \frac{س-١}{٤-س}$$

الحل

$$\frac{3-س}{4} - \frac{س-٢}{(٣-س)(٤-س)} = \frac{س-١}{(٤-س)}$$

$$\frac{س-١}{٤-س} = \frac{س-١}{(٣-س)(٤-س)}$$

$$\frac{س-١}{٤-س} = \frac{س-١}{٤-س}$$

نوجد المقامات : نضرب الكسر الأول × س

$$\frac{س-١}{٤-س} = \frac{س-١}{(٤-س)}$$

خذ منهم مقام واضرح البسطين

$$\frac{س-١}{٤-س} = \frac{س-١}{٤-س}$$

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{س-٢}{٤-س} + \frac{س-١}{٢-س} = \frac{س-١}{٢-س}$$

الحل

$$\frac{س-٢}{٤-س} + \frac{س-١}{(٢-س)(٣-س)} = \frac{س-١}{(٢-س)(٣-س)}$$

$$\frac{س-١}{٢-س} = \frac{س-١}{(٢-س)(٣-س)}$$

$$\frac{س-١}{٢-س} = \frac{س-١}{٢-س}$$

نوجد المقامات : نضرب الكسر الأول × (٣-س)

$$\frac{س-١}{٢-س} = \frac{س-١}{(٢-س)(٣-س)}$$

اضرب س × القوس واجمع البسطين

$$\frac{س-١}{٢-س} = \frac{س-١}{(٢-س)(٣-س)}$$

## نصم

معلم اول رياضيات

٣ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{س-١}{١-س} + \frac{س-٢}{١-س} = \frac{س-١}{١-س}$$

الحل

$$\frac{س-١}{١-س} = \frac{س-١}{١-س}$$

$$\frac{س-١}{١-س} = \frac{س-١}{١-س}$$

نضرب المسالب التي قدام القوس × الـ + بتاعت الجمع

$$\frac{س-١}{١-س} = \frac{س-١}{١-س}$$

خذ بالك ان العملية اتحولت طرح

$$\frac{س-١}{١-س} = \frac{س-١}{١-س}$$

$$\frac{س-١}{١-س} = \frac{س-١}{١-س}$$

٣ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{س-١}{١-س} + \frac{س-٢}{١-س} = \frac{س-١}{١-س}$$

الحل

$$\frac{س-١}{١-س} + \frac{س-٢}{(٢-س)(٢-س)} = \frac{س-١}{(٢-س)(٢-س)}$$

$$\frac{س-١}{١-س} = \frac{س-١}{(٢-س)(٢-س)}$$

$$\frac{س-١}{١-س} = \frac{س-١}{٢-س}$$

$$\frac{س-١}{١-س} = \frac{س-١}{٢-س}$$

اجمع الحدود المتشابهة التي في البسط

$$\frac{س-١}{١-س} = \frac{س-١}{٢-س}$$

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال :

$$ن(س) = \frac{س - ٥}{س + ٥} + \frac{س^٢ - ١}{س - ١} =$$

الحل

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$ن(س) = \frac{س + ٢}{س - ٤} + \frac{س}{س^٢ + ٢س} =$$

الحل

٤ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$ن(س) = \frac{س + ٤}{س - ١٦} - \frac{س}{س - ٤} =$$

الحل

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س + ٦} - \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٣ - ٨} =$$

الحل



## ضرب الكسور الجبرية



١ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن (متناسخ العامل المشترك)

٢ إخراج المجال المشترك (ح - أصفار المقامين)

٣ حذف العوامل المشتركة بين أي بسط وأي مقام

يعني تقدر تحذف قوس من بسط الأول مع التي شبهه في مقام الثاني وهكذا وده بينفع في الضرب ومش بينفع في الجمع

٤ ضرب البسط × البسط والمقام × المقام

مثال:

أوجد ن (س) في أبسط صورة حيث

$$ن(س) = \frac{س^2 + 3س - 2}{س + 3} \times \frac{س + 1}{س^2 - 1}$$

الحل:

$$ن(س) = \frac{(س + 1)(س - 2)}{س + 3} \times \frac{س + 1}{(س - 1)(س + 1)}$$

$$\text{المجال} = ح - \{1, -1, -3\}, \quad ن(س) = 1$$

## قسمة الكسور الجبرية



\* كل اللي هتعمله انت تحول القسمة إلى ضرب كالتالي :

الـ ÷ خليها × ← وشقلب الكسر التاني ← وحل بخطوات الضرب عادي

\* ملحوظة : فيه اختلاف صغير في مسائل القسمة لما تكتب المجال وهو :

المجال في القسمة = ح - أصفار المقامين وأصفار بسط الثاني

مثال:

أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^2 + 3س - 2}{س + 3} \div \frac{س^2 - 1}{س + 5}$$

الحل:

$$ن(س) = \frac{س^2 + 3س - 2}{س + 3} \times \frac{س + 5}{س^2 - 1}$$

$$= \frac{(س + 5)(س - 1)(س + 3)}{(س - 1)(س + 1)(س + 3)}$$

$$\text{المجال} = ح - \{1, -1, -3\}$$

$$ن(س) = \frac{س + 5}{س + 1}$$



## أمثلة محلولة

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 - ٨}{س^2 + س - ٤} \times \frac{س + ٣}{س^2 + ٢س + ٤}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - ٢)(س + ٤)}{(س + ٣)(س - ٢)} \times \frac{س + ٣}{س^2 + ٢س + ٤}$$

المجال = ح - { ٢ ، -٣ }

$$ن(س) = ١$$

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 - ١}{س^2 + س - ١} \times \frac{س + ٣}{س^2 + ٢س + ٤}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)} \times \frac{س + ٣}{س^2 + ٢س + ٤}$$

المجال = ح - { ٠ ، -١ }

$$ن(س) = \frac{س + ٣}{س}$$

٣ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 + ٢س + ٩}{س^2 + ٣} \div \frac{س^2 + ٢س + ٩}{س^2 + ٣}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 + ٢س + ٩}{س^2 + ٣} \times \frac{س^2 + ٣}{س^2 + ٢س + ٩}$$

$$ن(س) = \frac{(س + ٢)(س + ٣)}{(س + ٣)(س - ٣)} \times \frac{س + ٣}{س^2 + ٣}$$

$$ن(س) = \frac{س + ٢}{س - ٣} \quad \text{المجال} = ح - \{ ٣ ، -٢ ، ٠ \}$$

تصميم هجره عوض حسن  
معلم اول رياضياتتصميم هجره عوض حسن  
معلم اول رياضيات

$$٤ \quad \text{إذا كانت ن(س) = } \frac{س^2 - ٩}{س^2 + ٣س + ٤} \div \frac{س^3 + ٦س^2 - ٤٥س}{س^2 - ٩}$$

فأوجد ن (س) في أبسط صورة موضحا المجال

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 - ٩}{س^2 + ٣س + ٤} \times \frac{س^2 - ٩}{س^3 + ٦س^2 - ٤٥س}$$

$$ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س + ٢)(س + ٤)} \times \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س + ٢)(س + ٤)}$$

$$ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س + ٢)(س + ٤)} \times \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س + ٢)(س + ٤)}$$

المجال = ح - { ٠ ، -٣ ، -٤ ، -٢ }

$$ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س + ٢)(س + ٤)}$$

$$٥ \quad \text{أوجد: ن(س) = } \frac{س^2 + ٤س + ٣}{س^2 + ٢٧س - ٢٨} \div \frac{س^2 + ٣س + ٩}{س^2 + ٣س + ٩}$$

ثم أوجد ن (٢) ، ن (٣) إن أمكن

الحل

$$ن(س) = \frac{(س + ٣)(س + ١)}{(س + ٣)(س + ١)} \times \frac{س^2 + ٣س + ٩}{س^2 + ٣س + ٩}$$

المجال = ح - { ٣ ، -٣ }

$$ن(س) = \frac{س + ١}{س - ٣}$$

$$ن(٢) = \frac{١ + ٢}{٢ - ٣} = -١$$

ن (٣) غير ممكنة لأن ٣ - ٣ = ٠ للمجال

أوجد ن (س) وعين مجالها حيث:

$$\frac{10 - 3س}{5 + 3س + 16س} \times \frac{1 + س}{2 - س} = ن(س)$$

ثم أوجد ن (0) ، ن (-1) إن أمكن

الحل

$$\frac{(2 - س)(5 + س)}{(1 + س)(5 + س)} \times \frac{1 + س}{(2 - س)} = ن(س)$$

$$\frac{1}{3} = ن(س)$$

$$\frac{1}{1 + 3س} = ن(س)$$

$$1 = \frac{1}{1 + 3س} \Rightarrow 1 + 3س = 1 \Rightarrow 3س = 0 \Rightarrow س = 0$$

ن (-1) غير ممكنة لأن 1- للمجال

أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{10 - 2س}{9 + 6س} \div \frac{15 - 2س}{9 - س} = ن(س)$$

الحل

مناشئ: ال ÷ فنقلبها × ونقلب الكسر الثاني

$$\frac{10 - 2س}{9 + 6س} \times \frac{9 - س}{15 - 2س} = ن(س)$$

$$\frac{(3 - س)(5 - س)}{(3 + س)(3 - س)} \times \frac{(3 - س)(3 - س)}{(3 - س)(3 - س)} = ن(س)$$

$$\frac{3 - س}{3} = ن(س)$$

$$\frac{3 - س}{3} = ن(س)$$



نصه  
معلم اول رياضيات

أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{24 + 4س}{5 + 6س} \div \frac{36 + 12س}{1 - 36س} = ن(س)$$

الحل

عاري فنعمل إيه في المقدار 36 - س !!

هنخليه كده - (36 - س)

$$\frac{(4 + س)(6 + س)}{(3 + س)(3 - س)} \times \frac{(3 - س)(3 - س)}{(3 - س)(3 - س)} = ن(س)$$

$$\frac{4 - س}{3} = ن(س)$$

أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{15 - 3س}{5 + 6س} \div \frac{2 + 3س}{1 - 36س} = ن(س)$$

الحل

1- س هنخليه - (1 - 36س) ونحول الضرب لقسمة

$$\frac{15 - 3س}{5 + 6س} \times \frac{1 - 36س}{2 + 3س} = ن(س)$$

$$\frac{(3 - س)(5 - س)}{(5 + 6س)} \times \frac{(1 - 36س)}{(2 + 3س)} = ن(س)$$

$$\frac{3 - س}{3} = ن(س)$$

$$\frac{3 - س}{3} = ن(س)$$

نصه  
معلم اول رياضيات

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 + س + 1}{س} \times \frac{س^2 - 1}{س - 1}$$

الحل

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$ن(س) = \frac{س^4 + 12}{س^5 - 25} \times \frac{س^3 - 15}{س + 3}$$

الحل

٣ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^3 - 2س^2}{س^4 - 9} + \frac{س^3 - 2س^2}{س^2 - 6}$$

الحل

٤ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 + 2}{س^3 + 9} \div \frac{س^2 + 2س}{س^2 - 27}$$

ثم أوجد ن (٢) ، ن (-٢) إن أمكن

الحل



# المعكوس الضربي للكسر الجبري



◆ إذا رمزنا للكسر الجبري بالرمز  $n$  (س) فإن معكوسه الضربي يرمز له بالرمز  $n^{-1}$  (س)

◆ إذا كان  $n$  (س)  $\frac{1-s}{3+s}$  فإن  $n^{-1}$  (س)  $\frac{3+s}{1-s}$  ( شقلب الكسر يجيك معكوسه )

◆ مجال  $n^{-1} = ح -$  أصفار البسط و المقام من المثال اللي فات: مجال  $n^{-1}$  (س)  $= ح - \{ -3, 1 \}$

## تدريب ١

$$\frac{s^3 + s^2}{27 + s^3} = (s) \text{ إذا كان } n$$

أوجد  $n^{-1}$  (س) في أبسط صورة مبينا مجال  $n^{-1}$  (س)

الحل

## مثال ١

$$\frac{s^2 - 9}{s^2 + s - 6} = (s) \text{ إذا كان } n$$

أوجد  $n^{-1}$  (س) في أبسط صورة مبينا مجال  $n^{-1}$  (س)

الحل

$$n^{-1} (s) = \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 9} \text{ شقلبنا الكسر}$$

$$\frac{(s-3)(s+3)}{(s-3)(s+3)} = \text{حللنا}$$

المجال  $= ح - \{ -3, 3 \}$

$$n^{-1} (s) = \frac{s-3}{s+3} \text{ اختصرنا}$$

## تدريب ٢

$$\frac{s^3 - s^2}{(2+s^2)(3-s)} = (s) \text{ إذا كان } n$$

فأوجد: ١)  $n^{-1}$  (س) مبينا مجالها

٢) قيمة  $s$  إذا كان  $n^{-1}$  (س)  $= 3$

الحل

## مثال ٢

$$\frac{s^2 - 2s}{s^2 + s - 2} = (s) \text{ إذا كان } n$$

فأوجد: ١)  $n^{-1}$  (س) مبينا مجالها

٢) قيمة  $s$  إذا كان  $n^{-1}$  (س)  $= 3$

الحل

$$n^{-1} (s) = \frac{s^2 + s - 2}{s^2 - 2s} = \frac{(s-2)(s+1)}{s(s-2)}$$

مجال  $n^{-1} = ح - \{ 0, 2 \}$

$$n^{-1} (s) = \frac{s+1}{s}$$

$$\therefore n^{-1} (s) = 3 \therefore \frac{s+1}{s} = 3 \text{ (مقص)}$$

$$\therefore s - 1 = 3s \therefore s = -\frac{1}{2}$$

## أسئلة اختر على الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ مجموعة أصفار الدالة  $(س) = س^2 + ٤$  في ح هي .....  
 (أ)  $\{ ٢ \}$  (ب)  $\{ ٢, -٢ \}$  (ج) ح (د)  $\emptyset$
- ٢ مجموعة أصفار الدالة د:  $(س) = س^3 - ٣س$  هي .....  
 (أ)  $\{ ٠ \}$  (ب)  $\{ ٣ - \}$  (ج)  $\{ (٠, ٣ -) \}$  (د) ح
- ٣ مجموعة أصفار الدالة د:  $(س) = س(س^2 - ٢س + ١)$  هي .....  
 (أ)  $\{ ١, ٠ \}$  (ب)  $\{ ١ - , ٠ \}$  (ج)  $\{ (٠, ١ -) \}$  (د)  $\{ ١ \}$

الحل:

- ٤ إذا كانت ص(د) =  $\{ ٢ \}$  ، د(س) =  $س^3 - م$  فإن م = .....  
 (أ)  $\sqrt[3]{٢}$  (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

الحل:

- ٥ إذا كانت ص(د) =  $\{ ٥ \}$  ، د(س) =  $س^3 - ٣س^2 + أ$  فإن أ = .....  
 (أ)  $٥ -$  (ب)  $٥ -$  (ج) ٥ (د) ٥٠

الحل:

- ٦ مجال الدالة ن(س) =  $\frac{س}{١ - س}$  هو .....  
 (أ) ح - { صفر } (ب) ح - { ١ } (ج) ح - { صفر , ١ } (د) ح - { ١ - }

- ٧ إذا كان ن<sub>١</sub>(س) =  $\frac{٧ - س}{٢ + س}$  ، ن<sub>٢</sub>(س) =  $\frac{س}{س - ٧}$  وكان المجال المشترك هو ح - { ٧ , ٢ - } فإن ك = .....  
 (أ) ٢ (ب) ٧ (ج) ٢ - (د) ٧ -

- ٨ إذا كانت ن<sub>١</sub>(س) =  $\frac{١ + س}{٢ - س}$  ، ن<sub>٢</sub>(س) =  $\frac{٤}{٢ - س}$  وكان ن<sub>١</sub>(س) = ن<sub>٢</sub>(س) فإن أ = .....  
 (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

- ٩ إذا كانت س  $\neq$  صفر فإن  $\frac{س^٥}{١ + س^٢} \div \frac{س}{١ + س^٢} =$  .....  
 (أ)  $٥ -$  (ب) ١ - (ج) ١ (د) ٥

- ١٥ مجال المعكوس الضربى للدالة د(س) =  $\frac{س + ٢}{س - ٣}$  هو .....  
 (أ)  $\{ ٣ \}$  (ب) ح - { ٣ , ٢ - } (ج) ح - { ٢ } (د) ح

- ٥٥ إذا كان للكسر الجبري  $\frac{س - أ}{س + ٥}$  معكوس ضربى وهو  $\frac{س + ٥}{س + ٣}$  فإن أ = .....  
 (أ) ٣ (ب)  $٥ -$  (ج)  $٣ -$  (د) ٥

## الواجب المنزلي

## الأصفار والمجال

- ١ إذا كانت  $\{ 2, -2 \}$  هي مجموعة أصفار الدالة  $D(s) = s^2 + m$  فأوجد قيمة  $m$
- ٢ أوجد المجال المشترك لكل من:  $N_1(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 5s + 6}$  ،  $N_2(s) = \frac{s^3}{s^2 - 1}$
- ٣ إذا كان مجال الدالة  $D$  حيث  $D(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4s + 4}$  هو  $C - \{ 2 \}$  فأوجد قيمة  $A$

## تساوي كسرين جبريين

- ٤ إذا كانت:  $N_1(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 5s + 6}$  ،  $N_2(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 - 9}$  بين ما إذا كانت  $N_1 = N_2$  أم لا مع ذكر السبب
- ٥ إذا كانت:  $N_1(s) = \frac{s^2}{s^3 - 2s}$  ،  $N_2(s) = \frac{s}{s^3 - 2s}$  فاثبت أن  $N_1 = N_2$
- ٦ أوجد المجال المشترك الذي تساوى فيه الدالتان:  $N_1(s) = \frac{1}{s-2}$  ،  $N_2(s) = \frac{s+2}{s^2 - 1}$

## جمع وطرح الكسور الجبرية

- ٧ أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا المجال حيث:  $N(s) = \frac{s^3 - 4}{s^2 + 5s + 6} - \frac{s^2 + 2}{s^2 - 1}$
- ٨ أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا المجال حيث:  $N(s) = \frac{s - 3}{s^2 - 12} - \frac{s - 3}{s^2 - 9}$
- ٩ أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا المجال حيث:  $N(s) = \frac{s - 5}{s^2 + 6s + 5} + \frac{s - 2}{s^2 - 1}$

## ضرب وقسمة الكسور الجبرية

- ٥٥ أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا المجال حيث:  $N(s) = \frac{s^2 - 2}{s^2 + 1} \div \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}$
- ٥٥ أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا المجال حيث:  $N(s) = \frac{s^2 + 2s - 3}{s + 3} \div \frac{s - 1}{s + 1}$
- ٥٦ إذا كان  $N(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 8} \times \frac{s^2 - 9}{s^2 + 7}$  أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا مجالها ثم احسب قيمة  $N(1)$

## المعكوس الضربي للكسر الجبري

- ٥٧ إذا كان  $N(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}$  فأوجد: (١)  $N^{-1}(s)$  مبينا مجالها (٢)  $N^{-1}(3)$
- ٥٨ إذا كان  $N(s) = \frac{s^2 - 4s - 5}{s^2 - 25}$  فأوجد: (١)  $N^{-1}(s)$  مبينا مجالها (٢)  $N^{-1}(5)$



# الاحتمال



## التقاطع $\cap$

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فإن :

$$P(A \cap B) = 0, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ملحوظة: متى يطلب  $P(A \cap B)$  بالطريقة اللفظية؟

لو قلنا : أوجد احتمال وقوع الحدث أ و ب معا

## الاتحاد $\cup$

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ملحوظة: متى يطلب  $P(A \cup B)$  بالطريقة اللفظية؟

لو قلنا : أوجد احتمال وقوع الحدث أ أو ب  
أو قلنا : أوجد احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

إذا كانت أ و ب فإن :  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$  الصغيرة

### مثال

إذا كان  $P(A) = 0.2$  ،  $P(B) = 0.6$  ،

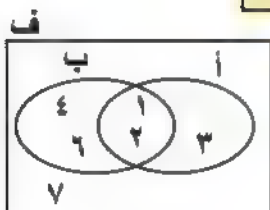
$P(A \cup B) = 0.7$  أوجد :  $P(A \cap B)$

الحل :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$0.1 = 0.2 + 0.6 - 0.7$$

### شكل فن



$$P(A \cap B) = \frac{2}{7}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cap B}{\text{العدد الكلي}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} =$$

إذا كانت أ و ب فإن :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  الكبيرة

### مثال

إذا كان  $P(A) = \frac{1}{4}$  ،  $P(B) = \frac{1}{3}$  ،  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

أوجد :  $P(A \cup B)$

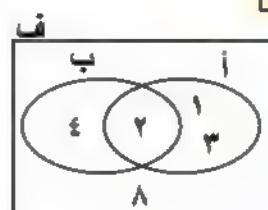
الحل :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{19}{60}$$

بالآلة الحاسبة

### شكل فن



$$P(A \cup B) = \frac{6}{8}$$

$$P(A \cup B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cup B}{\text{العدد الكلي}}$$

$$\frac{4}{5} =$$

## المكاملة

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$ل(أ) = ١ - ل(ب)$$

$$ل(أ) = ١ - ل(ب)$$

القاعدة العامة :

$$ل(أ) = ١ - ل(ب)$$

ملحوظة: متى يطلب ل(أ) بالطريقة اللفظية؟

لو قالك : أوجد احتمال **عدم** وقوع الحدث أ

### مثال

$$\text{إذا كان } ل(أ) = \frac{1}{5} , ل(ب) = \frac{1}{3} ,$$

أوجد : ل(أ) (١) ل(أ) (٢) احتمال عدم وقوع الحدث ب

الحل :

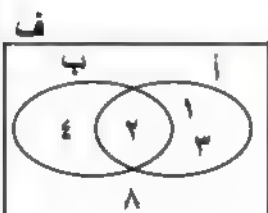
$$(١) ل(أ) = ١ - ل(ب) = ١ - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(٢) احتمال عدم وقوع الحدث ب : يقصد به ل(ب')

$$ل(ب') = ١ - ل(ب) = ١ - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

### شكل فن

أ : هي كل العناصر التي قدامك ما عدا عناصر أ



$$\{٨, ٤\} = أ'$$

$$ل(أ) = \frac{2}{5}$$

$$\{٨, ٣, ١\} = ب'$$

$$ل(ب') = \frac{3}{5}$$

## الفرق -

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$$

$$ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ \cap ب)$$

إذا كان أ ، ب حدثان متافيان فإن :

$$ل(أ - ب) = ل(أ)$$

ملحوظة: متى يطلب ل(أ - ب) بالطريقة اللفظية؟

لو قالك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ **فقط**

أو قالك : احتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب

لوعرفت الفرق والتقاطع فإن :

$$ل(أ) = ل(أ - ب) + ل(أ \cap ب)$$

### مثال

$$\text{إذا كان } ل(أ) = \frac{1}{4} , ل(ب) = \frac{1}{3} , ل(أ \cap ب) = \frac{1}{5}$$

أوجد : ل(أ - ب) ، ل(ب - أ)

الحل :

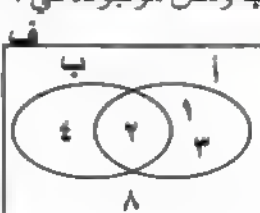
$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ \cap ب) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

### شكل فن

أ - ب : هي العناصر الموجودة في أ ومش موجودة في ب

ب - أ : هي العناصر الموجودة في ب ومش موجودة في أ



$$\{٣, ١\} = ب - أ$$

$$ل(ب - أ) = \frac{2}{5}$$

$$\{٤\} = أ - ب$$

$$ل(أ - ب) = \frac{1}{5}$$

## أمثلة محلولة

إعداد/محمود عوض حسن

١ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $P(A) = 0.3$  ،  $P(B) = 0.6$  ،  $P(A \cap B) = 0.2$   
أوجد :  $P(A \cup B)$  ،  $P(A - B)$

الحل

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.7 = 0.3 + 0.6 - 0.2$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$0.1 = 0.3 - 0.2$$

٢ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $P(A) = \frac{3}{8}$  ،  $P(B) = \frac{1}{4}$  ،  $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$   
أوجد :  $P(A \cap B)$  ،  $P(A - B)$

الحل

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{5}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{8} - P(A \cap B)$$

٣ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $P(A) = 0.8$  ،  $P(B) = 0.7$  ،  $P(A \cap B) = 0.6$   
فأوجد : ① احتمال عدم وقوع الحدث  $A$   
② احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

الحل

احتمال عدم وقوع الحدث  $A$  معناه  $P(A')$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$0.2 = 1 - 0.8$$

احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل معناه  $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.9 = 0.8 + 0.7 - 0.6$$

٤ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين متنافيين من تجربة عشوائية  
وكان  $P(A) = \frac{1}{3}$  ،  $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$   
فأوجد  $P(B)$

الحل

∵  $A$  ،  $B$  حدثان متنافيان ∴  $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + P(B)$$

$$\therefore P(B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{4}{12} - \frac{4}{12} = 0$$

٥ صندوق يحتوى على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء ،  
٤ كرات حمراء وباقي الكرات بيضاء ، سحب كرة عشوائية  
فاحسب احتمال أن تكون الكرة :  
① زرقاء ② ليست حمراء ③ زرقاء أو حمراء

العدد الكلى = ١٢ ، عدد الكرات البيضاء = ٣

$$P(\text{احتمال أن تكون زرقاء}) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء}}{\text{العدد الكلى}} = \frac{5}{12}$$

$$P(\text{احتمال ليست حمراء}) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والبيضاء}}{\text{العدد الكلى}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{احتمال زرقاء أو حمراء}) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والحمراء}}{\text{العدد الكلى}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

٦ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين متنافيين من تجربة عشوائية  
وكان  $P(A) = \frac{1}{4}$  ،  $P(B) = \frac{2}{3}$   
أوجد  $P(A \cap B)$  ،  $P(A \cup B)$

الحل



٧ إذا كان أ ، ب حديثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل (ب) =  $\frac{1}{12}$  ، ل (أ ∪ ب) =  $\frac{1}{3}$   
 فاوجد ل (أ) إذا كان: ① أ ، ب متنافيان  
 ②  $A \supset B$

**العمل**

**أولاً : إذا كان أ ، ب متتافيان :**

∴  $1 \text{ (أ) } \cap 0 \text{ (ب)} = \text{صفر}$

$$(b) J + (a) J = (b \cup a) J$$

$$\frac{1}{12} + (1)u = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = (1) \text{J}$$

### ثانياً : إذا كانت ب د أ :

∴  $L(A \cup B) = L(A)$       الاتحاد = الكبيرة

$$\frac{1}{2} = (1) \therefore$$

## الحل

**أولاً : إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان :**

∴  $(A \cap B) = \text{صفر}$

$$(B) \cup (A) = (B \cup A)$$

$$(P) \quad 1 + 1,0 = 1,8$$

۱,۳ = ۱,۵ - ۱,۸ = ( پ ) ل

ثانياً : إذا كان  $L = (A \cap B)$  ، ١ \*

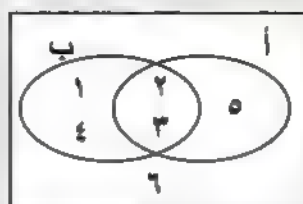
$$(P \cap A) \cup (P \cap B) = (P \cap (A \cup B))$$

$$1,1 - (ب) + 1,0 = 1,1$$

$$e, f = e, f - e, g = (b)l$$

**تصویر** **مردمان** **مردمان**

**باستخدام شكل قن المقابل أوجد :**



- (۱) (۱۰ ب)

- (۲) ل (أ - ب)

- (٣) احتمال عدم وقوع الحدث أ

## الحل

العدد الكلي ف = ٦

(١)  $\{2, 3\} = A \cap B$  عدد العناصر = ٢

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{\text{عدد عناصر } A \cap B}{\text{العدد الكلي}} = \frac{1}{3} \Rightarrow (A \cap B) = 1$$

(۲)  $A - B = \{ 5 \}$  عدد عناصره  $= 1$

$$\frac{1}{6} = \frac{\text{عدد عناصر أ - ب}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{1}{6} \Rightarrow (أ - ب) = 1$$

(۳) احتمال عدم وقوع  $A$  بقصد به  $L$  (أ)

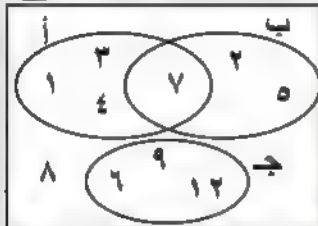
عدد عناصره  $3 = \{1, 2, 3\}$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \left(\frac{1}{2}\right) \text{ J}$$

الحل

انت اقوى من شكل فن

۱۰. بااستخدام شکل فن اوجد: ف



- ل (أ ن ب) ، ل (أ U ب)

- ل (پ ن چ)

- ل (أ-ب) ، ل (ب')



٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $L(A) = \frac{1}{4}$  ،  $L(B) = \frac{1}{3}$  فأوجد  $L(A \cup B)$   
إذا كان: ①  $L(A \cap B) = \frac{1}{8}$  ، ② أ ، ب متنافيان

الحل

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $L(A) = \frac{4}{9}$  ،  $L(B) = \frac{3}{9}$  ،  $L(A \cap B) = \frac{1}{9}$   
أوجد :  $L(A \cup B)$  ،  $L(A - B)$  ،  $L(B - A)$

الحل

٤ كيس به ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠  
، سحبت بطاقة عشوائيا ، أوجد احتمال أن تكون  
البطاقة تحمل عددا :  
① يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥  
② يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥

الحل

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $L(A) = ٠,٤$  ،  $L(B) = ٠,٥$   
،  $L(A \cup B) = ٠,٢$   
أوجد :  $L(A \cap B)$  ،  $L(B - A)$

الحل

## أسئلة اختر على الإحصاء

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن  $P(A \cap B) = \dots$   
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٠,٥ (د)  $\Phi$

٢ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين متنافيين فإن  $P(A \cap B) = \dots$   
 (أ)  $\Phi$  (ب) صفر (ج) ٠,٥٦ (د) ١

٣ إذا كانت  $A$  و  $B$  لتجربة عشوائية ما وكان  $P(A) = \frac{1}{2}$  ،  $P(B) = \frac{1}{3}$  فإن  $P(A \cap B) = \dots$   
 (أ)  $\frac{1}{3}$  (ب)  $\frac{1}{4}$  (ج)  $\frac{2}{3}$  (د) ١

٤ إذا كان  $P(A) = \frac{1}{2}$  ،  $P(B) = \frac{1}{3}$  فإن  $P(A \cap B) = \dots$   
 (أ) صفر (ب) ١ (ج)  $\frac{1}{4}$  (د)  $\frac{1}{2}$

٥ إذا كان  $A \subset B$  فإن  $P(A \cup B)$  تساوي  
 (أ) صفر (ب)  $P(A)$  (ج)  $P(B)$  (د)  $P(A \cap B)$

٦ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين متنافيين وكان  $P(A) = \frac{1}{3}$  ،  $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$  فإن  $P(B) = \dots$   
 (أ)  $\frac{1}{4}$  (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج)  $\frac{1}{2}$  (د) ١

٧ إذا كان احتمال وقوع الحدث  $A$  هو ٦٥% فإن احتمال عدم وقوعه يساوي  
 (أ) ٣٥% (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج) ٠,٦٥ (د) ١

٨ إذا كان احتمال وقوع الحدث  $A$  هو ٧٥% فإن احتمال عدم وقوعه هو  
 (أ)  $\frac{1}{4}$  (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج)  $\frac{1}{4}$  (د) ١

٩ إذا أُلقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوي  
 (أ) صفر% (ب) ٢٥% (ج) ٥٠% (د) ١٠٠%

١٥ إذا أُلقي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي وظهور عدد فردي يساوي  
 (أ) صفر (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج)  $\frac{3}{4}$  (د) ١

٢٥ إذا أُلقي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ يساوي  
 (أ) صفر (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج)  $\frac{1}{3}$  (د)  $\frac{1}{2}$



## تراكمي

١ إذا كانت النسبة بين محيطي مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتهما = ١ : ٤

٢ المعكوس الجمعي للكسر  $\frac{3}{1+2}$  هو  $\frac{3}{1+2}$  س

٣ إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو  $3 - س$  (أ)  $3 + س$  (ب)  $3 س$  (ج)  $3 - س$  (د)  $\frac{3}{س}$

٤ إذا كان أ<sup>٢</sup> - ب<sup>٢</sup> = ٢١ ، أ + ب = ٧ فإن أ - ب = ٣

٥ إذا كان عمر رجل الآن س سنة فإن عمره بعد ٥ سنوات هو  $س + ٥$  وعمره منذ ٣ سنوات هو  $س - ٣$

٦ احتمال الحدث المستحيل = صفر بينما احتمال الحدث المؤكد = ١

٧ إذا كان س<sup>٢</sup> - ص<sup>٢</sup> = ٢ (س + ص) فإن س - ص = ٢

٨ إذا كان (٥ ، س - ٧) = (٥ + ص ، ١ - ٥) فإن س + ص = ٢ + ٤ = ٦

٩ الدالة د حيث د(س) = س<sup>٦</sup> + ٢س<sup>٤</sup> - ٣ كثيرة حدود من الدرجة السادسة

١٠ إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = س<sup>٢</sup> - أ يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن أ = ١

١١ عددان موجبان مجموعهما ٧ ، وحاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما ٣ ، ٤

١٢ إذا كان ٢س = ١ فإن  $\frac{1}{س} = \frac{1}{2}$  س

١٣ مجموعة حل المعادلة ٢س + ٤ = ٠ في ط هي

١٤ إذا كان المقدار س<sup>٢</sup> + كس + ٣٦ مربعا كاملا فإن ك =  $\pm ١٢$

١٥ إذا كان ٥س = ٤ فإن ٥س - ١ = ٥س × ٥ =  $\frac{1}{5} \times 4 = \frac{4}{5}$

١٦ إذا كان ٣س + ٧ = ١ فإن س = -٧

١٧ إذا كان ٣س + ٣س + ٣س = ٣ × ٣س = ٣س + ٣س + ٣س

١٨  $\sqrt{٣٦ + ٦٤} = ١٠$  + ٨

١٩ مجموعة حل المعادلة ٢س + ٤ = ٠ في ح هي

٢٠ إذا كانت س<sup>٢</sup> - ص<sup>٢</sup> = ٨١ فإن  $\frac{س}{ص} = \frac{9}{1}$

٢١  $[١ ، ٥] \cup [-٢ ، ٣] =$

مدرسة مصر الخير الإعدادية لجهينة - سوهاج

الترم  
الثاني

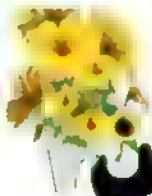
الصف الثالث الإعدادي

٢٠٢٠

إهداء إلى الطالبة



ملزمة  
**ألهند سنة**



إعداد وتصميم

**محمود عوض حسن**

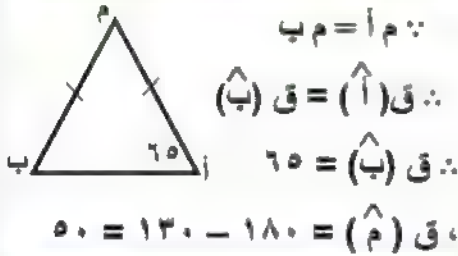
معلم أول رياضيات

**استعدوا للمفامرة**

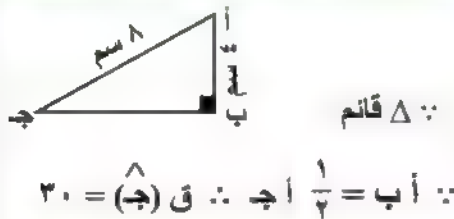


# أساسيات تراكمية

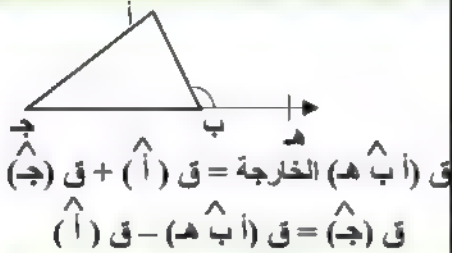
في المثلث المتساوي الساقين  
زاويتا القاعدة متساويتان



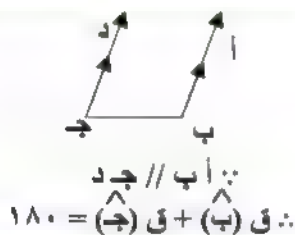
إذا كان طول الضلع = نصف طول  
الوتر فإن الزاوية المقابلة له = 30



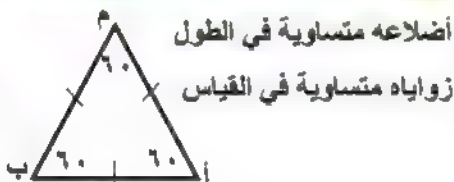
قياس الزاوية الخارجة عن المثلث -  
مجموع الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة



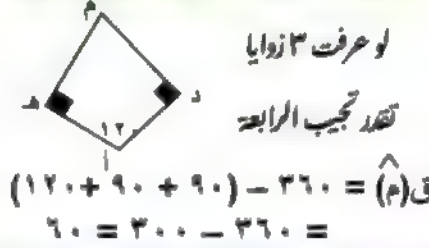
إذا وجد توازي حرف U فإن  
الزاويتان المتداخلتان متكاملتان



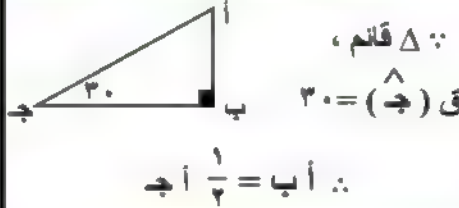
المثلث المتساوي الأضلاع



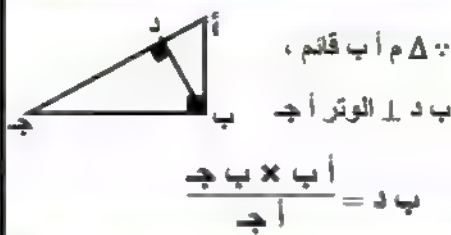
مجموع قياسات زوايا  
الشكل الرباعي = 360



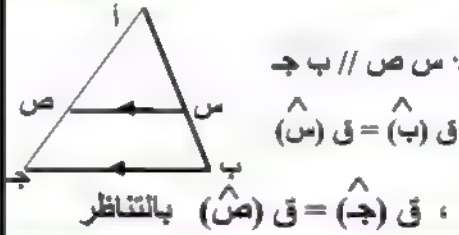
طول الضلع المقابل للزاوية 30  
= نصف طول الوتر



نظرية إقليدس



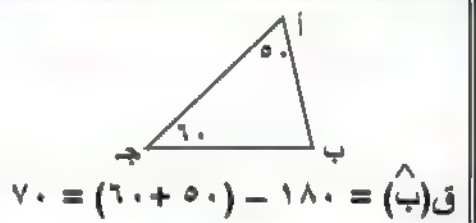
إذا وجد توازي حرف F فإن  
الزاويتان المتناظرتان متساويتان



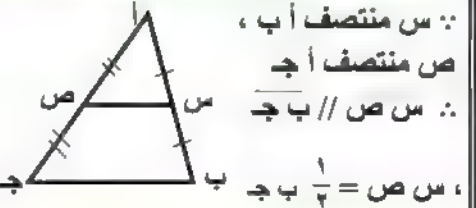
حالات تطابق مثلثين

- ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
- زاويتان والضلع المرسوم بينهما
- وتر وضلع (في المثلث القائم)

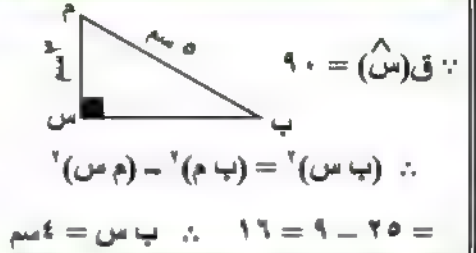
مجموع قياسات زوايا  $\Delta = 180$



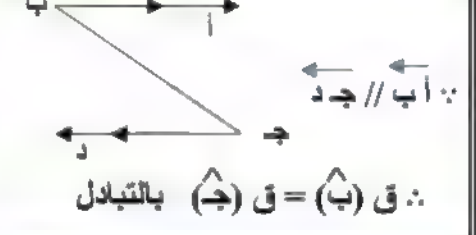
القطعة الواصلة بين منتصفى  
ضلعين توازي الضلع الثالث



نظرية فيثاغورث



إذا وجد توازي حرف Z فإن  
الزاويتان المتبادلتان متساويتان

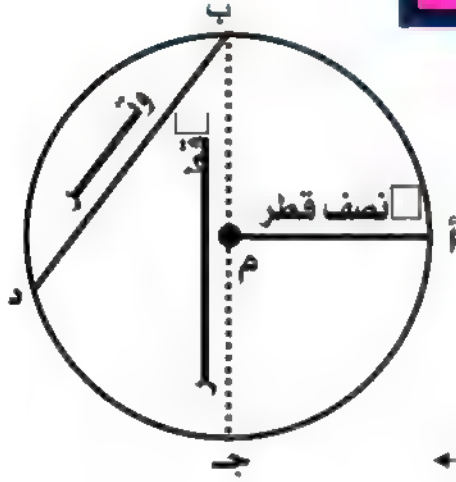


إثبات التوازي

نبحث عن إحدى الحالات الآتية:

- زاويتان متبادلتان متساويتان
- زاويتان متناظرتان متساويتان
- زاويتان متداخلتان متكاملتان





**نصف القطر :** هو قطعة مستقيمة طرفها مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة

**الوتر :** هو قطعة مستقيمة طرفها أي نقطتين على الدائرة

**القطر :** هو وتر مار بمركز الدائرة ، وهو أطول الأوتار طولاً



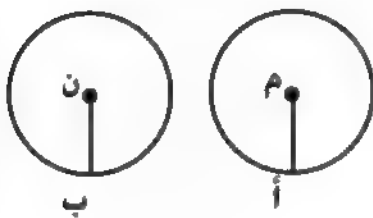
**محور التماثل :** هو المستقيم المار بمركز الدائرة.

الدائرة لها عدد لا نهائي من محاور التماثل

عدد محاور تماثل نصف أو ربع أو ثلث الدائرة محور واحد

**الفرق بين الدائرة وسطح الدائرة**

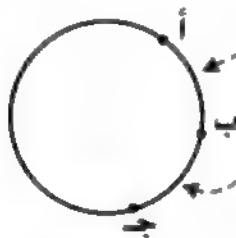
الدائرة	سطح الدائرة	ملحوظة مهمة
الخط الأسود المرسوم ده هو الدائرة	هو الخط الأسود + الجزء المظلل	<p><math>\overleftrightarrow{AB} \cap \text{الدائرة} = \{A, B\}</math> بينما <math>\overleftrightarrow{AB} \cap \text{سطح الدائرة} = \overline{AB}</math></p>



**الدائرتان المتطابقتان :** هما دائرتان أنصاف أقطارهما متساوية في الطول.

إذا كانت م ، ن دائرتان متطابقتان فإن  $M = N$

**القوس :** هو جزء من خط الدائرة



من أ إلى ب يسمى قوس ويكتب :  $\widehat{AB}$

من ب إلى ج يسمى قوس ويكتب :  $\widehat{BC}$

من أ إلى ج يسمى قوس ويكتب :  $\widehat{AC}$  أو  $\widehat{AB}$

محيط الدائرة =  $2\pi$  نق

طول ربع الدائرة =  $\frac{1}{4}\pi$  نق

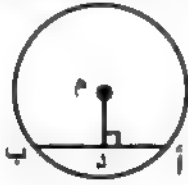
مساحة الدائرة =  $\pi$  نق<sup>2</sup>

طول نصف الدائرة =  $\pi$  نق

## نتائج هامة



المستقيم المار بمركز الدائرة  
وعمودياً على أي وتر فيها  
ينصف هذا الوتر



∴  $MD \perp AB$   
∴ D منتصف AB ∴  $AD = DB$   
فإذا كان  $AB = 8$  سم فإن  $AD = 4$  سم

### مثال ٣



أوجد طول AD

الحل:

في  $\triangle MAB$  من فيثاغورث  
 $DB = 8$  سم

∴  $MD \perp AB$  ∴ D منتصف AB

∴  $AD = DB = 8$  سم

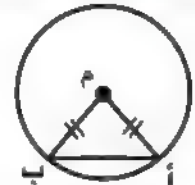
### تدريب ٣



أب = 8 سم أوجد M ب



أنصاف الأقطار في الدائرة  
الواحدة متساوية في الطول



∴ MA = MB ∴ أنصاف أقطار  
∴ MA = MB  
أي أن:  $\angle C = \angle B$

### مثال ١



أوجد  $\angle C$  (م أ ب)

الحل:

∴ MA = MB ∴ أنصاف أقطار

∴  $\angle C = \angle B$

$$50 = \frac{180 - 80}{2} =$$

### تدريب ١



أوجد  $\angle C$  (م أ ب)



∴ D منتصف الوتر AB

∴  $MD \perp AB$

∴  $\angle C = \angle B = 90$

### مثال ٢



أوجد  $\angle C$  (م أ ب)

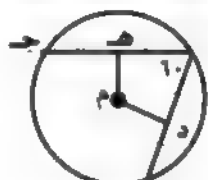
الحل:

∴ D منتصف AB ∴  $MD \perp AB$

∴  $\angle C = \angle B = 90$

∴  $\angle C = \angle B = 90 = 180 - 90 = 90$

### تدريب ٢



أوجد  $\angle C$  (م أ ب)

١ في الشكل المقابل :  
د، ه منتصفا أب، أج  
على الترتيب  
ق (أ) = ١٢٠°  
اثبت أن Δ س ص م متساوي الاضلاع

الحل

∵ د منتصف أب ∴ م د ⊥ أب

$$\therefore \text{ق (م د أ)} = 90^\circ$$

∵ ه منتصف أج ∴ م ه ⊥ أج

$$\therefore \text{ق (م ه أ)} = 90^\circ$$

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

$$\therefore \text{ق (د م ه)} = (120 + 90 + 90) - 360 = 60^\circ$$

$$\therefore \text{ق (ص م س)} = 60^\circ \text{ بالتقابل بالرأس}$$

∵ م ص = م س (أنصاف أقطار)

$$\therefore \text{ق (م ص س)} = \text{ق (م س ص)} = 60^\circ$$

∴ Δ س ص م متساوي الاضلاع (جميع زواياه ٦٠°)

٢ في الشكل المقابل :  
م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم  
أب وتر فيها طوله ٢٤ سم  
ج منتصف أب  
أوجد: مساحة Δ ادب

الحل

∵ ج منتصف أب ∴ م ج ⊥ أب ∴ ق (م ج أ) = ٩٠°

$$\therefore \text{أب} = ٢٤ \text{ سم} \quad \therefore \text{أج} = ١٢ \text{ سم}$$

في Δ م ج أ القائم : بتطبيق فيثاغورث

$$\therefore \text{م ج} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = ٥$$

$$\therefore \text{م ج} = ٥ \text{ سم} \quad \therefore \text{د م} = ١٣ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ج د} = ١٣ - ٥ = ٨ \text{ سم}$$

∴ مساحة المثلث =  $\frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$$\therefore \text{مساحة } \Delta \text{ ادب} = \frac{1}{2} \times ٢٤ \times ٨ = ٩٦ \text{ سم}^2$$

٣ في الشكل المقابل :  
أب وتر في الدائرة م  
أج ينصف ب أ م  
د منتصف أب  
اثبت أن م د ⊥ ج م

الحل

في Δ ام ج : ∵ م أ = م ج (أنصاف أقطار)

$$\therefore \text{ق (م أ ج)} = \text{ق (م ج أ)} \quad (١)$$

$$\therefore \text{ق (م أ ج)} = \text{ق (ب أ ج)} \quad (٢) \text{ معطى}$$

من ١، ٢ ينتج أن:

$$\text{ق (م ج أ)} = \text{ق (ب أ ج)} \text{ وهما متبادلتان}$$

$$\therefore \text{أب} \parallel \text{ج م}$$

∵ د منتصف أب ∴ م د ⊥ أب

$$\therefore \text{أب} \parallel \text{ج م} \quad \therefore \text{م د} \perp \text{ج م}$$

٤ في الشكل المقابل :  
م س ⊥ أب، م ص ⊥ أج  
ق (أ) = ٦٠°  
ق (ب) = ٧٠°  
أوجد قياسات زوايا Δ م س ص

الحل

$$\text{ق (ج)} = 180 - (60 + 70) = 50^\circ$$

∵ م س ⊥ أب ∴ م س منتصف أب

∵ م ص ⊥ أج ∴ م ص منتصف أج

∴ م س // م ص (قطعة واصله بين منتصفى ضلعين)

$$\therefore \text{ق (أ س ص)} = ٧٠^\circ \quad \therefore \text{ق (أ ص س)} = ٥٠^\circ \text{ بالتناظر}$$

$$\therefore \text{ق (م س ص)} = ٧٠ - ٩٠ = ٢٠^\circ$$

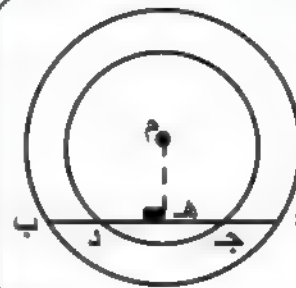
$$\therefore \text{ق (م ص س)} = ٥٠ - ٩٠ = ٤٠^\circ$$

في Δ س م ص :

$$\text{ق (س م ص)} = (٤٠ + ٢٠) - ١٨٠ = ١٢٠^\circ$$



١

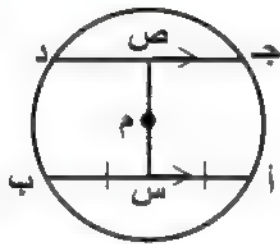


دائرتان متحدتا المركز م  
أب وتر في الدائرة الكبرى  
يقطع الصغرى في ج، د  
اثبت أن:  $أج = ب د$

الحل

العمل: نرسم م ه عمودي على أب

٢



أب // جد  
س منتصف أب  
اثبت أن:  
س منتصف جد

الحل

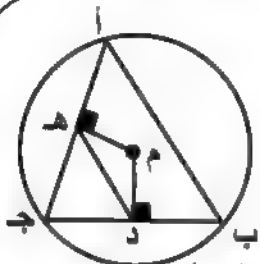
٣



جد قطر في الدائرة م  
م ه  $\perp$  أب  
قي  $(\angle م ه د) = 30^\circ$   
أب = ١٠ سم  
أوجد طول جد، ه د

الحل

٤



أب ج  $\Delta$  مرسوم داخل دائرة  
م د  $\perp$  ب ج، م ه  $\perp$  أ ج  
اثبت أن: (١) ه د // أب  
(٢) محيط  $\Delta ج د ه = \frac{1}{4}$  محيط  $\Delta أ ب ج$

الحل

# أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة



## أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة

إذا كانت  $M$  دائرة طول نصف قطرها  $نق$  ،  $A$  نقطة فإن النقطة  $A$  تقع :

على المركز



إذا كان :  $M = A$  = صفر

داخل الدائرة



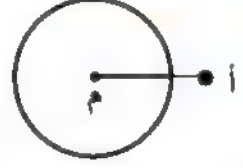
إذا كان :  $M > A$   $نق$

على للدائرة



إذا كان :  $M = A$   $نق$

خارج الدائرة



إذا كان :  $M < A$   $نق$

## أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة

إذا كانت  $M$  دائرة طول نصف قطرها  $نق$  ،  $A$  نقطة  $\exists$  المستقيم فإن المستقيم يكون :

قاطع للدائرة



إذا كان :  $M > A$   $نق$

$\vec{L} \cap \text{الدائرة } M = \{S, V\}$   
 $\vec{L} \cap \text{سطح } M = \overline{SV}$

مماس للدائرة

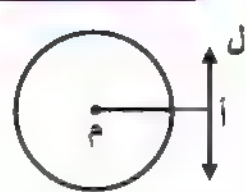


$A$  : نقطة التماس

إذا كان :  $M = A$   $نق$

$\vec{L} \cap \text{الدائرة } M = \{A\}$   
 $\vec{L} \cap \text{سطح } M = \{A\}$

خارج الدائرة



إذا كان :  $M < A$   $نق$

$\vec{L} \cap \text{الدائرة } M = \emptyset$   
 $\vec{L} \cap \text{سطح } M = \emptyset$

## تدريب

إذا كانت  $M$  دائرة طول قطرها ٨ سم ، والمستقيم  $L$  يبعد عن مركزها ٤ سم فإن المستقيم  $L$  يكون .....

إذا كانت  $M$  دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ،  $A$  نقطة في المستوى بحيث  $M = A$  ٤ سم فإن  $A$  تقع ..... الدائرة

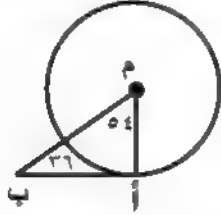
إذا كانت  $M$  دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، والمستقيم  $L$  مماس ، فإن المستقيم  $L$  يبعد عن مركزها ..... سم

# نتائج هامة على المماس

اعداد / محمد هادي

لإثبات أن المستقيم مماس

هنثبت ان الزاوية التي بينه وبين نصف القطر قياسها ٩٠



تدريب في الشكل المقابل

اثبت ان AB مماس

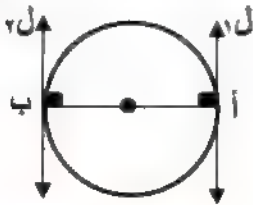
الحل

في  $\triangle MAB$ :

$$\angle MAB = 180 - (54 + 36) = 90^\circ$$

$\therefore AB$  مماس

المماسان المرسومان من نهايتي قطر متوازيان



$\therefore AB$  قطر

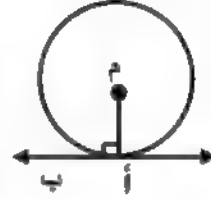
$L_1, L_2$  مماسان

$$\therefore L_1 \parallel L_2$$

ملحوظة: المماسان المرسومان من نهايتي وتر متقاطعان

المماس عمودي على نصف القطر

المرسوم من نقطة التماس

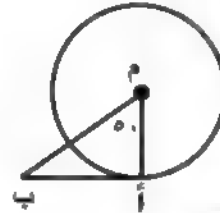


$\therefore AB$  مماس ،  $MA$  نصف قطر

$$\therefore MA \perp AB$$

$$\therefore \angle MAB = 90^\circ$$

تدريب



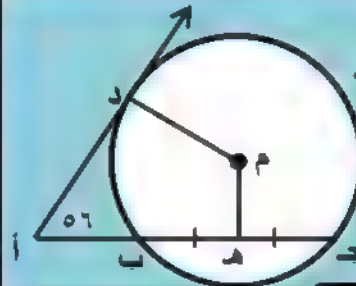
في الشكل المقابل:

$AB$  مماس للدائرة

أوجد  $\angle B$

الحل

مثال ١



$AD$  مماس للدائرة عند

$H$  منتصف  $AB$

$$\angle A = 56^\circ$$

أوجد  $\angle D$

الحل

$AD$  مماس ،  $MH$  نصف قطر  $\therefore MH \perp AD$

$$\therefore \angle MHA = 90^\circ$$

$H$  منتصف  $AB$   $\therefore MH \perp AB$

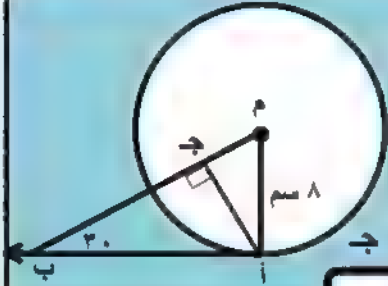
$$\therefore \angle MHB = 90^\circ$$

$\therefore$  مجموع قياسات الشكل الرباعي  $MHAD = 360^\circ$

$$\therefore \angle D = 360 - (90 + 90 + 56) = 124^\circ$$

$$124 = 360 - 236$$

مثال ٢



$AB$  مماس للدائرة عند

$A$   $MA = 8$  سم

$$\angle B = 30^\circ$$

أوجد طول كل من  $AB$  ،  $AM$

الحل

$AB$  مماس  $\therefore MA \perp AB$   $\therefore \triangle MAB$  قائم

$$\therefore \angle B = 30^\circ \quad \therefore MB = 16 \text{ سم} \quad \therefore MB = 2 \times MA = 2 \times 8$$

من فيثاغورث: في  $\triangle MAB$

$$AB^2 = MB^2 - MA^2 = 16^2 - 8^2 = 192 \quad \therefore AB = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

في  $\triangle MAB$ :  $\therefore$   $\angle B = 30^\circ$  هو الضلع المقابل للزاوية  $30^\circ$

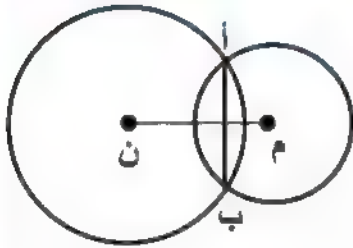
$$\therefore \frac{1}{2} \text{ الوتر } AB = \frac{1}{2} \times 16 = 8 \quad \therefore \frac{1}{2} AB = 8 \quad \therefore AB = 16$$

ملحوظة: يمكن حساب  $AB$  باستخدام نظرية اقليدس

إذا كانت م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما نق<sub>١</sub> ، نق<sub>٢</sub> ، م ن خط المراكز فإن الدائرتان تكونان :

متقاطعتان

٣



\* نق<sub>١</sub> - نق<sub>٢</sub> < م ن < نق<sub>١</sub> + نق<sub>٢</sub>

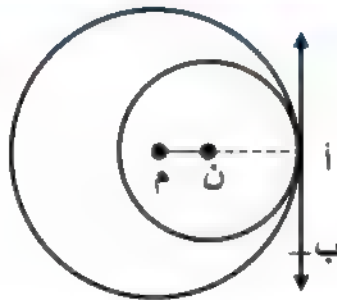
الطرح > م ن > المجموع

\* الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

\* أ ب يسمى وتر مشترك

متماسستان من الداخل

٢



\* إذا كان : م ن = نق<sub>١</sub> - نق<sub>٢</sub>

م ن = الطرح

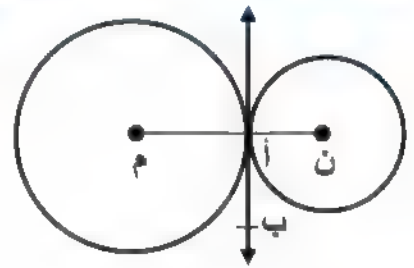
\* الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

\* سطح م ∩ سطح ن = سطح ن

\* أ ب يسمى مماس مشترك

متماسستان من الخارج

١



\* إذا كان : م ن = نق<sub>١</sub> + نق<sub>٢</sub>

م ن = المجموع

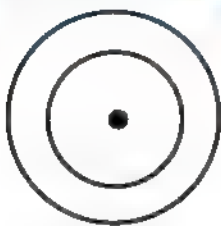
\* الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

\* سطح م ∩ سطح ن = { أ }

\* أ ب يسمى مماس مشترك

متحدة المركز

٦



\* إذا كان : م ن = صفر

\* الدائرة م ∩ الدائرة ن =

\* سطح م ∩ سطح ن = سطح م

متداخلتان

٥



\* م ن > نق<sub>١</sub> - نق<sub>٢</sub>

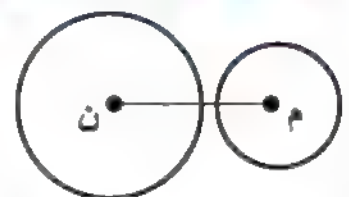
م ن > الطرح

\* الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

\* سطح م ∩ سطح ن = سطح م

متباعدتان

٤



\* إذا كان : م ن < نق<sub>١</sub> + نق<sub>٢</sub>

م ن < المجموع

\* الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

\* سطح م ∩ سطح ن = ∅

ملحوظة : عشان قحود وضع الدائرتان اجمع نق<sub>١</sub> + نق<sub>٢</sub> واطوح نق<sub>١</sub> - نق<sub>٢</sub> وقاوفهم بخط الموكزين

تدريب

م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما ٩ سم ، ٥ سم حدد موضع الدائرتان عندما :

٣- م ن = ٣ سم

الدائرتان

٢- م ن = ٤ سم

الدائرتان

١- م ن = ١٤ سم

الدائرتان

٦- م ن = ٧ سم

الدائرتان

٥- م ن = صفر

الدائرتان

٤- م ن = ١٦ سم

الدائرتان

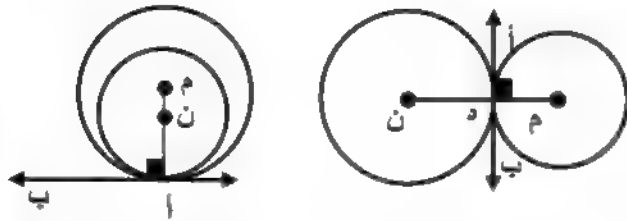


# نتائج هامة على خط المركزين



في الدائرتان المتماستان

خط المركزين عمودي على المماس المشترك

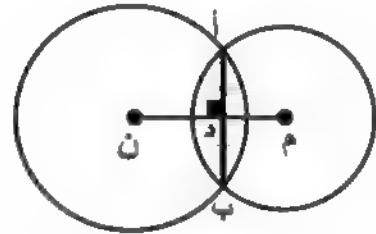


∴  $\overline{AB}$  مماس مشترك ،  $\overline{MN}$  خط المركزين  
 ∴  $\overline{MN} \perp \overline{AB}$  ∴  $\angle(م د أ) = 90^\circ$



في الدائرتان المتقاطعتان

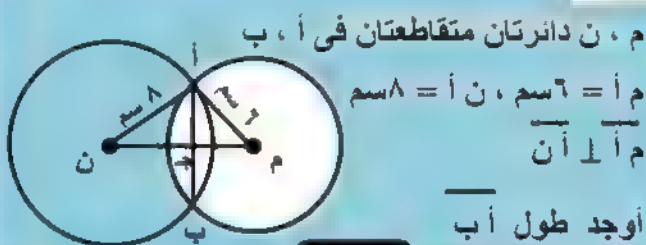
خط المركزين عمودي على الوتر المشترك وينصفه



∴  $\overline{AB}$  وتر مشترك ،  $\overline{MN}$  خط المركزين  
 ∴  $\overline{MN} \perp \overline{AB}$  ∴  $\angle(م د أ) = 90^\circ$   
 ،  $\overline{MN}$  ينصف  $\overline{AB}$  ∴  $AD = DB$

## نص مدهود مودن معلم اول رياضيات

مثال ٢



الحل

في  $\triangle AMN$  (من فيثاغورث) :

$$\overline{MA} \perp \overline{MN} \quad \therefore (م ن) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\therefore م ن = 10 \text{ سم}$$

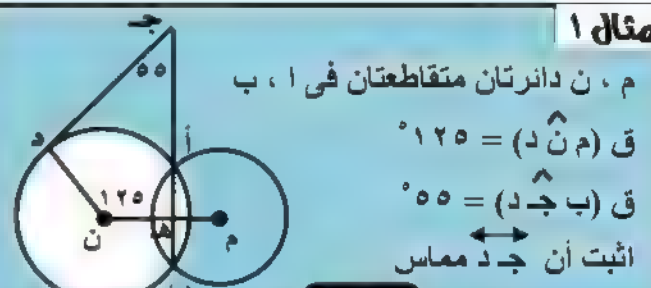
∴  $\overline{AB}$  وتر مشترك ∴  $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

$$\text{من إقليدس : } \overline{AD} = \frac{\overline{AM} \times \overline{AN}}{\overline{MN}} = \frac{6 \times 8}{10} = 4,8 \text{ سم}$$

∴  $\overline{AB}$  وتر مشترك ∴  $\overline{MN}$  ينصف  $\overline{AB}$

$$\therefore \overline{AB} = 4,8 \times 2 = 9,6 \text{ سم}$$

مثال ١



الحل

∴  $\overline{AB}$  وتر مشترك ،  $\overline{MN}$  خط المركزين

∴  $\overline{AB} \perp \overline{MN}$  ∴  $\angle(أ ه ن) = 90^\circ$

∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي =  $360^\circ$

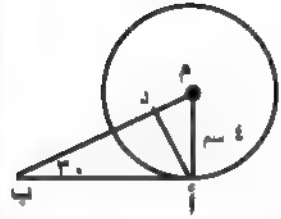
$$\therefore \angle(د) = (90 + 55 + 125) - 360 = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{ND} \perp \overline{AB}$$

$$\therefore \overline{ND} \text{ مماس}$$

(وهو المطلوب اثباته)

# تدريبات



أكمل :

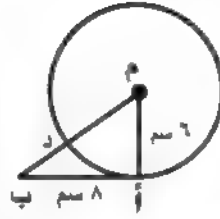
$$\widehat{Q(MAB)} = \dots\dots\dots$$

$$MB = \dots\dots\dots \text{سم}$$

$$AB = \dots\dots\dots \text{سم}$$

$$\widehat{Q(M)} = \dots\dots\dots$$

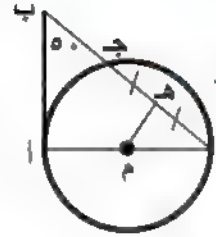
$$AD = \dots\dots\dots \text{سم}$$



أب مماس

أوجد طول DB

الحل

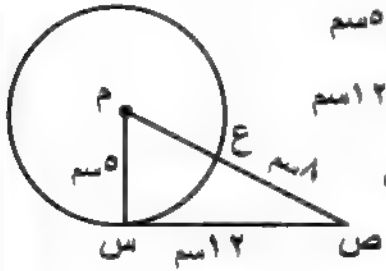


أب مماس ، د أ قطر  
د منتصف جـ د

$$\widehat{Q(B)} = 50^\circ$$

أوجد : ق (أ م د)

الحل

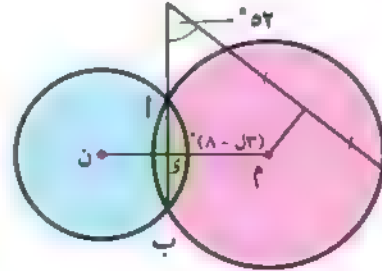


م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

$$ص ع = ٨ \text{ سم} ، ص س = ١٢ \text{ سم}$$

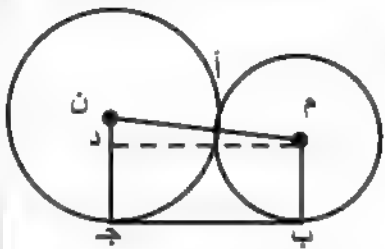
اثبت أن س ص مماس

الحل



أوجد قيمة ل

الحل



م ، ن دائرتان متماستان

ب ج مماس مشترك

$$MB = ٥ \text{ سم} ، ND = ٨ \text{ سم}$$

أوجد طول ب ج

الحل

العمل : نرسم  $MD \perp ND$

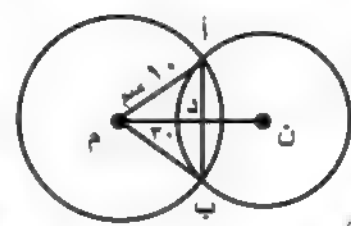
ب ج مماس مشترك  $\therefore MB \perp AB ، ND \perp AB$

$\therefore$  الشكل م ب ج د مستطيل

$$\therefore ND = MB = ٥ \text{ سم} \therefore ND = ٨ - ٥ = ٣ \text{ سم}$$

$$MN = ٨ + ٥ = ١٣ \text{ سم} \text{ ومن فيثاغورث في } \triangle MND :$$

$$(١٠) \quad (MD)^2 = ١٦٩ - ٩ = ١٦٠ \therefore MD = \sqrt{١٦٠} ، AB = \sqrt{٤} = ٢$$



م ، ن دائرتان متقاطعتان

$$MA = ١٠ \text{ سم}$$

$$\widehat{Q(MN)} = 30^\circ$$

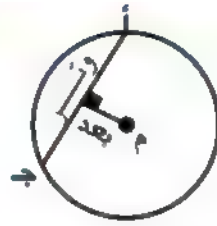
أوجد طول AB

الحل

# العلاقة بين الأوتار والأبعاد



اعرف / فهم / عوَض

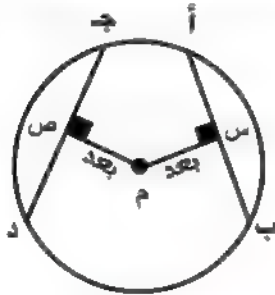


البعد لازم يكون عمودي

ولو قالك انه ينصف الوتر استنتج من التنصيف انه عمودي

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

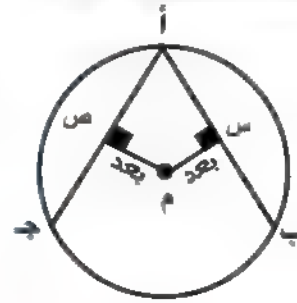
**إذا كانت الأبعاد متساوية  
فإن الأوتار تكون متساوية**



$\because$  م س = م ص  
(الأبعاد متساوية)  
 $\therefore$  أب = جـد  
(الأوتار متساوية)

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

**إذا كانت الأوتار متساوية  
فإن الأبعاد تكون متساوية**

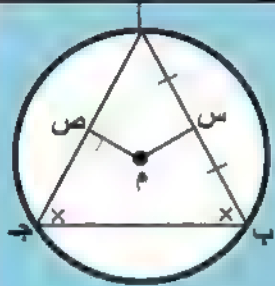


$\therefore$  أب = أ جـ  
(الأوتار متساوية)  
 $\therefore$  م س = م ص  
(الأبعاد متساوية)

**لو عطالك وترين متساويين : استنتج ان البعدين متساويين والعكس.**

**ولو طلب منك تثبت ان وترين متساويين : حاول تثبت ان البعدين متساويين والعكس.**

**مثال ٢**



أ ب جـ  $\Delta$  مرسوم داخل دائرة م  
ق (ب) = ق (جـ)  
س منتصف أب ، م ص  $\perp$  أ جـ  
اثبت أن : م س = م ص

**الحل**

$\because$  س منتصف أب  $\therefore$  م س  $\perp$  أب

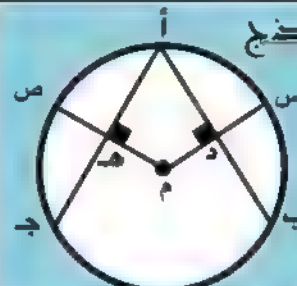
في  $\Delta$  أ ب جـ :

$\because$  ق (ب) = ق (جـ)  
 $\therefore$  أب = أ جـ (أوتار متساوية)

$\therefore$  م س = م ص (الأبعاد متساوية)

**مثال ١**

**مسألة من النماذج**



أ ب = أ جـ  
م د  $\perp$  أب ، م هـ  $\perp$  أ جـ  
اثبت أن : س د = ص هـ

**الحل**

$\because$  أب = أ جـ (أوتار متساوية)

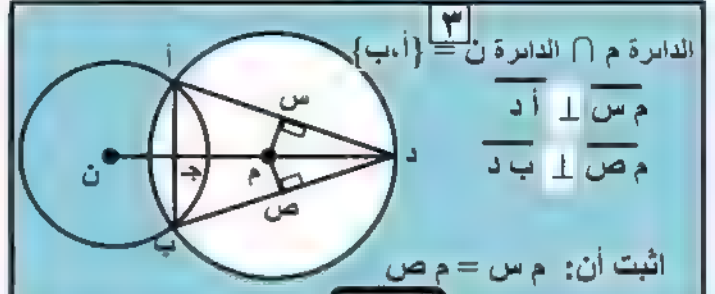
$\therefore$  م د  $\perp$  أب ، م هـ  $\perp$  أ جـ

$\therefore$  م د = م هـ (١) (الأبعاد متساوية)

$\because$  م س = م ص (٢) (أنصاف أقطار)

بطرح ١ من ٢ ينتج أن :

س د = ص هـ



الحل

∵ أ ب وتر مشترك ، م ن خط المراكزين

∴ م ن  $\perp$  أ ب ، ج منتصف أ ب

أي أنه في  $\triangle$  أ ب ج : د ج محور تماثل أ ب

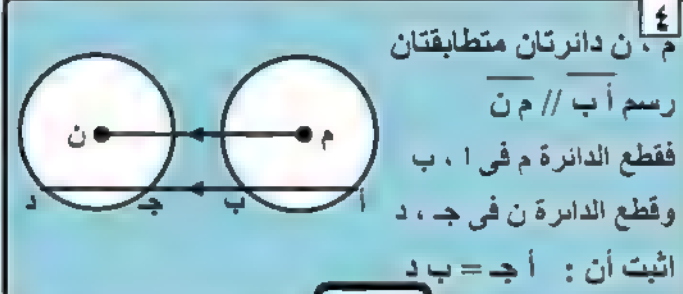
لأن د ج  $\perp$  أ ب و تتصفه

∴  $\triangle$  د أ ب متساوي الساقين

∴ د أ = د ب وهي أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

ملحوظة: يمكن الإثبات عن طريق تطابق  $\triangle$  أ د ج ، ب د ج



الحل

العمل: نرسم م س  $\perp$  أ ب ، ن ص  $\perp$  ج د



∴ م ن // أ ب ، م س  $\perp$  أ ب ، ن ص  $\perp$  ج د

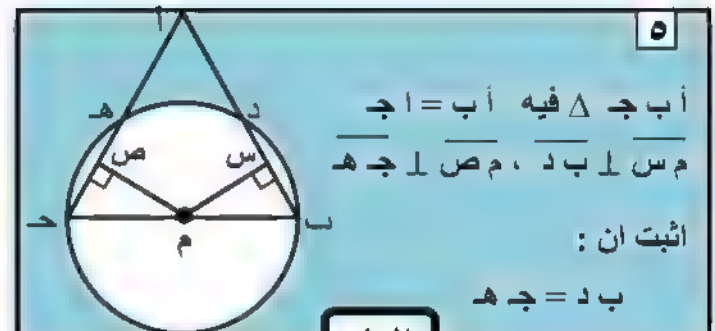
∴ الشكل م س ص ن مستطيل

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴ أ ب = ج د (الأوتار متساوية)

بإضافة ب ج للطرفين

∴ أ ج = ب د هـ ط ث



الحل

$\triangle$  م س ب ،  $\triangle$  م ص ج فيهما :

م ب = م ج أنصاف أقطار

ق (م س ب) = ق (م ص ج) =  $90^\circ$

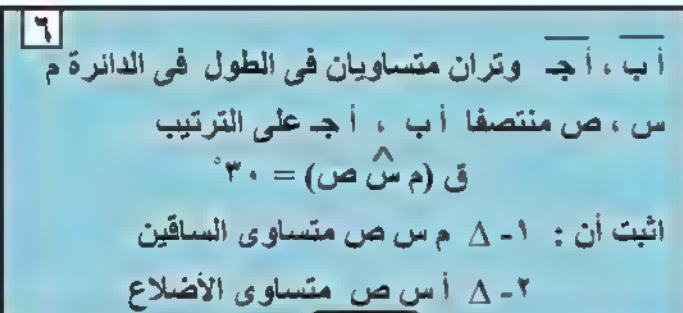
ق (ب) = ق (ج) لأن أ ب = أ ج

∴  $\triangle$  م س ب  $\equiv$   $\triangle$  م ص ج

ومن التطابق ينتج أن : م س = م ص (أبعاد)

∴ م س  $\perp$  ب د ، م ص  $\perp$  ج هـ

∴ ب د = ج هـ



الحل

∴ س منتصف أ ب ∴ م س  $\perp$  أ ب

∴ ص منتصف أ ج ∴ م ص  $\perp$  أ ج

∴ أ ب = أ ج (أوتار متساوية)

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴  $\triangle$  م س ص متساوي الساقين

∴ ق (م س ص) =  $30^\circ$  ، ق (م س أ) =  $90^\circ$

∴ ق (أ س ص) =  $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

ق (أ ص س) =  $60^\circ$  ، ق (أ) =  $60^\circ$

∴  $\triangle$  أ س ص متساوي الأضلاع



١

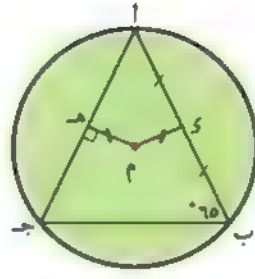
إذا كان:

$$م = 5م هـ$$

$$و (ب) = 60^\circ$$

فاوجد

$$و (ا)$$



الحل

٢

دائرتان متحدتا المركز م

$$ق (ب) = ق (هـ)$$

اثبت أن: ج د = ع ل



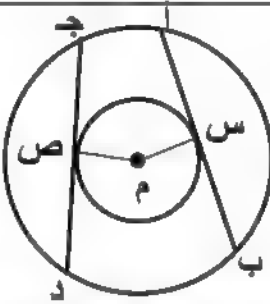
الحل

٤

دائرتان متحدتا المركز م

أ ب ، ج د مماسان للصغرى

اثبت أن: أ ب = ج د



الحل

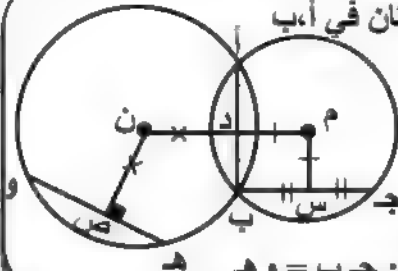
م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ب

س منتصف ج ب

$$م = س = د$$

$$ن = ص = د$$

ن ص ⊥ هـ و اثبت أن: ج ب = و هـ



الحل



**ଆମ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ହେଉ !**

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة واحدة.

◆ ممکن رسم عدد لا نهائی من الدوائر تمر نقطتين.

• إذا كان  $\text{نق} < \frac{1}{4}$  أب فإنه يمكن رسم دائرتان فقط.

• إذا كان  $\text{نق} = \frac{1}{4} \text{أب}$  فإنه يمكن رسم دائرة واحدة فقط وهي أصغر دائرة.

• إذا كان  $\text{نق} > \frac{1}{4}$  أب فإنه لا يمكن رسم أي دائرة.

### رسم دائرة نمر ثلاث نقاط

◆ أي ثلاث نقاط على استقامة واحدة لا يمكن أن تمر بها دائرة.

◆ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة وحيدة.

❖ يمكن رسم دائرة تمر بـ  $P$  و  $Q$  كل من : المستطيل - المربع - شبه المنحرف المتساوي الساقين

❖ لا يمكن رسم دائرة تمر بـ **برؤوس** : متوازي الأضلاع - المعين - شبه المنحرف غير المتساوي الساقين

**تذکرہ :**

١١) ارسم القطعة أ ب = ٤ سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم تمر بالنقطتين أ ، ب

٢) ارسم  $\Delta$  أ ب ج المتساوي الأضلاع طول ضلعه ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر بـ ب ووسطه ثم حدد موضع الدائرة

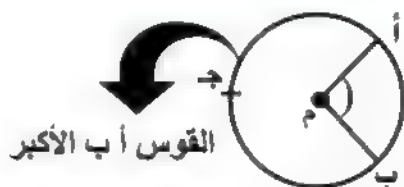
### بالنفسية لارتفاعاته

# الزاوية المركزية وقياس الأقواس

الصفحة  
الخامسة

هي زاوية رأسها مركز الدائرة ويحمل ضلعيها أنصاف أقطار

الزاوية المركزية

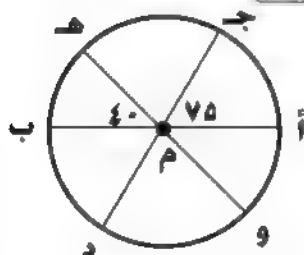


- أ م ب زاوية مركزية
- القوس المقابل لها هو القوس أ ب
- القوس أ ج ب يسمى أ ب الأكبر

قياس القوس يساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له

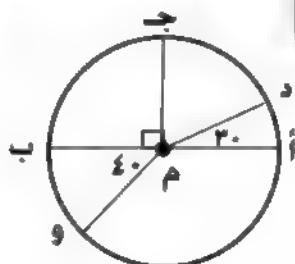
قياس القوس

تدريب



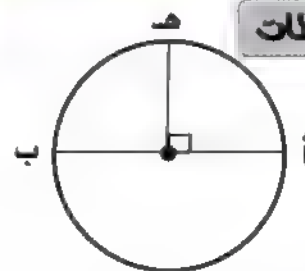
$$\begin{aligned} \text{ق (أ ج)} &= 75^\circ \\ \text{ق (ج د)} &= 40^\circ \\ \text{ق (أ د ج)} &= 115^\circ \\ \text{ق (أ و)} &= 220^\circ \end{aligned}$$

مثال



$$\begin{aligned} \text{ق (أ د)} &= 30^\circ \\ \text{ق (ج ب)} &= 90^\circ \\ \text{ق (د ج)} &= 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ \\ \text{ق (د ج ب)} &= 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ \\ \text{ق (أ ب و)} &= 40^\circ + 180^\circ = 220^\circ \end{aligned}$$

ملاحظات



- ◆ قياس الدائرة كلها =  $360^\circ$
- ◆ قياس نصف الدائرة =  $180^\circ$
- ◆ قياس ربع الدائرة =  $90^\circ$
- ◆ قياس خمس الدائرة =  $\frac{360}{5} = 72^\circ$

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق}$$

طول القوس

تدريب

أوجد قياس القوس الذي يمثل  $\frac{1}{3}$  الدائرة .  
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف  
قطر الدائرة ٧ سم .

الحل

مثال

أوجد قياس القوس الذي يمثل  $\frac{1}{3}$  الدائرة .  
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف  
قطر الدائرة ٧ سم .

الحل

$$\begin{aligned} \text{قياس القوس الذي يمثل } \frac{1}{3} \text{ الدائرة} &= \frac{360}{3} = 120^\circ \\ \text{طول القوس} &= \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق} \\ &= \frac{120}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 14.6 \text{ سم} \end{aligned}$$

تصنيف المسائل

## نتائج هامة

إذا كانت الأقواس متساوية  
فإن أوتارها تكون متساوية



إذا كان ق (أب) = ق (أج)  
فإن : أب = أج

مثال



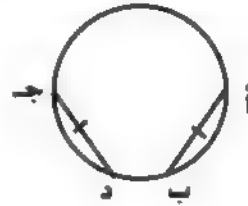
ق (أب) = ق (أج)  
ق (أ) = ٧٠  
فلوجد ق (ب)

الحل

∴ ق (أب) = ق (أج) ∵ أقواس متساوية  
∴ أب = أج ∵ أوتار متساوية

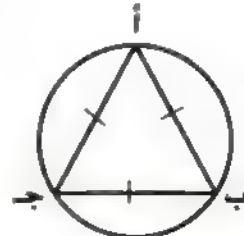
$$∴ ق (ب) = ق (أ) = \frac{180 - 70}{2} = \frac{110}{2} = 55^\circ$$

إذا كانت الأوتار متساوية  
فإن أقواسها تكون متساوية



إذا كان أب = ج د  
فإن : ق (أب) = ق (ج د)

مثال



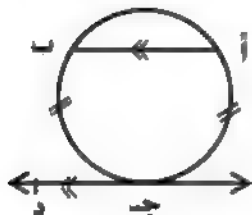
أب ج د ∆ متساوى الأضلاع  
أوجد ق (أب)

الحل

∴ أب = ج د = أج ∵ أوتار متساوية  
∴ ق (أب) = ق (ج د) = ق (أج) ∵ أقواس متساوية

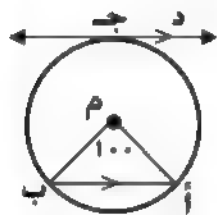
$$∴ ق (أب) = \frac{360}{3} = 120^\circ$$

الوتر والمماس المتوازيان  
يحصران قوسان متساويان



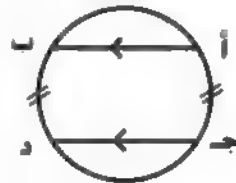
إذا كان  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$   
فإن ق (أب) = ق (ج د)

تدريب



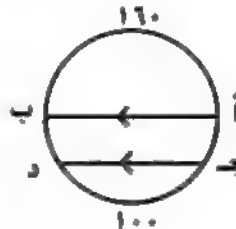
إذا كان  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$   
ق (أب) = ١٠٠  
فإن ق (أج) = .....

الوتران المتوازيان  
يحصران قوسان متساويان



إذا كان  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$   
فإن ق (أب) = ق (ج د)

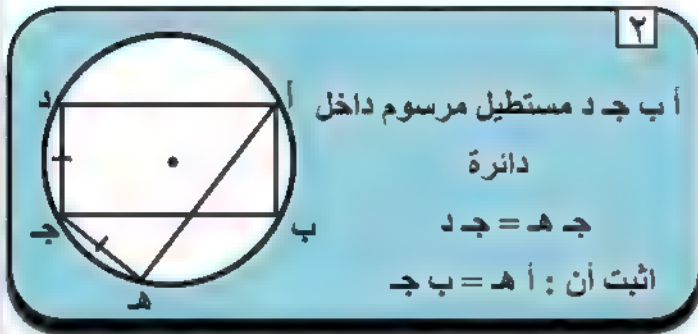
تدريب



إذا كان  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$   
ق (أب) = ١٦٠  
ق (ج د) = ١٠٠  
فإن ق (أج) = .....

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية في الطول متساوية في القياس





الحل

∴ أ ب = ج د خواص المستطيل

، ه ج = د ج (مطابق)

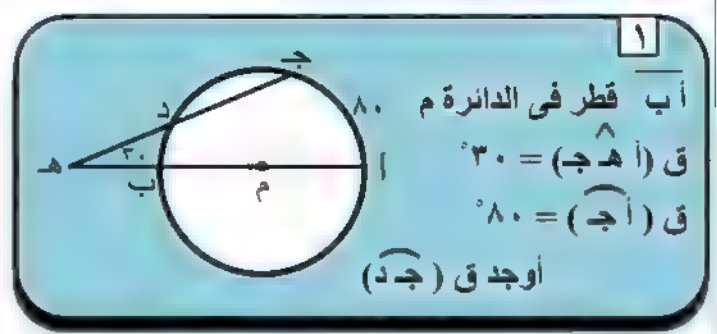
∴ أ ب = ه ج

∴ ق (أ ب) = ق (ه ج)

بإضافة ق (ب ه) للطرفين

∴ ق (أ ه) = ق (ب ج)

∴ أ ه = ب ج ه ط



الحل

العمل :

نرسم م ج ، م د

∴ ق (أ ج) = 80° ∴ ق (أ م ج) = 80°

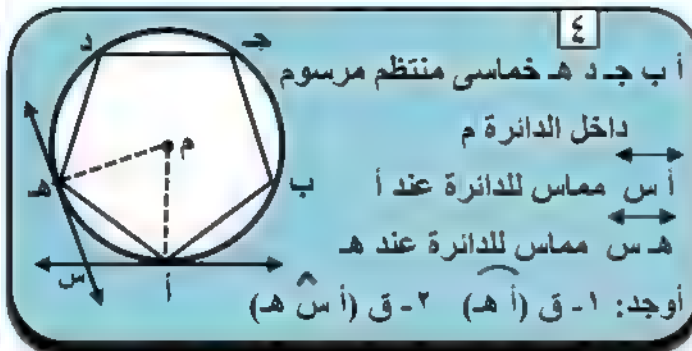
∴ أ م ج زاوية خارجة عن Δ ج م ه

∴ ق (م ج ه) = 80° - 30° = 50°

في Δ ج م د : ∴ م ج = م د (أنصاف أقطار)

∴ ق (ج م د) = 180° - (50° + 50°) = 80°

∴ ق (ج د) = 80°



الحل

العمل : نرسم م أ ، م ه

∴ أ ب ج د ه خماسي منتظم

∴ أ ب = ب ج = ج د = د ه = أ ه

∴ ق (أ ب) = ق (ب ج) = ق (ج د) = ق (د ه) = ق (أ ه)

∴ قياس الدائرة = 360° ∴ ق (أ ه) = 360° / 5 = 72° أولا

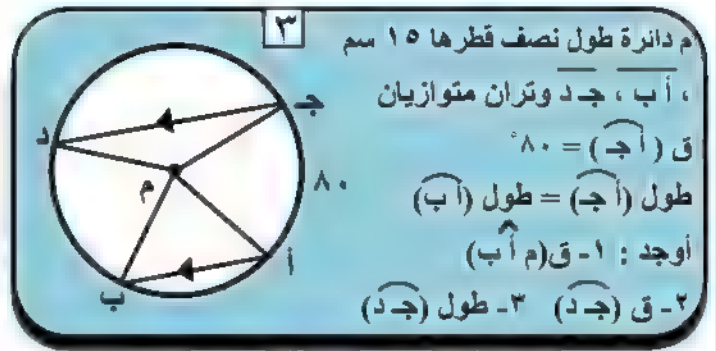
∴ ق (أ ه) = 72° ∴ ق (أ م ه) = 72°

∴ أ س مماس ∴ ق (م أ س) = 90°

∴ ه س مماس ∴ ق (م ه س) = 90°

في الشكل الرباعي م أ س ه :

ق (أ س ه) = 360° - (90° + 90° + 72°) = 108°



الحل

∴ طول (أ ج) = طول (أ ب)

∴ ق (أ ج) = ق (أ ب) = 80°

∴ ق (أ م ب) المركزية = 80°

∴ م أ = م ب (أنصاف أقطار) ∴ Δ م أ ب متساوي الساقين

∴ ق (م أ ب) = ق (م ب أ) = 50° المطلوب الأول

∴ أ ب // ج د ∴ ق (أ ج) = ق (ب د) = 80°

∴ ق (ج د) + ق (أ ج) + ق (أ ب) + ق (ب د) = 360°

∴ ق (ج د) = 360° - (80° + 80° + 80°) = 120°

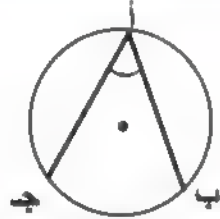
طول ج د = 120° / 360° × 2 × 3.14 × 15 = 31.4 سم

# العلاقة بين المحيطية والمركزية



هي زاوية رأسها على الدائرة ويحمل ضلعها وتران

الزاوية المحيطية



- ب أ ج زاوية محيطية
- القوس المقابل لها هو  $\widehat{ب ج}$

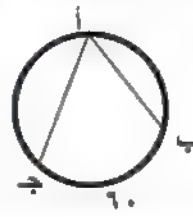
قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس  
المركزية المشتركة معها في القوس

قياس الزاوية المحيطية = نصف  
قياس القوس المقابل لها



د أ ج ب المحيطية ، د أ م ب المركزية  
مشتريكتان في  $\widehat{أ ب}$

$$\therefore ق (أ ج ب) = \frac{1}{2} ق (أ م ب)$$

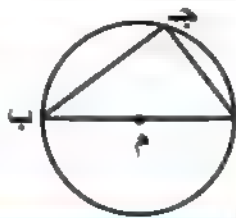


ق (ب أ ج) المحيطية =  $\frac{1}{2}$  ق (ب ج)

فإذا كان ق (ب ج) = 60

فإن ق (ب أ ج) = 30

الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

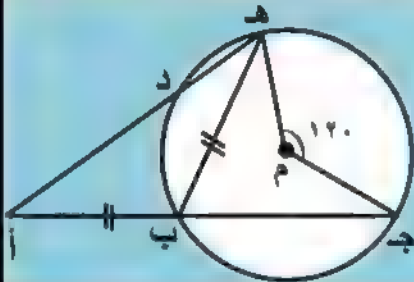


∴  $\overline{أ ب}$  قطر

∴ ق (ج) المحيطية = 90°

لأنها محيطية القوس المقابل لها نصف دائرة

مثال ٢



ق (هـ م ج) = 120°

أ ب = ب هـ

أوجد: ق (د أ ج)

الحل

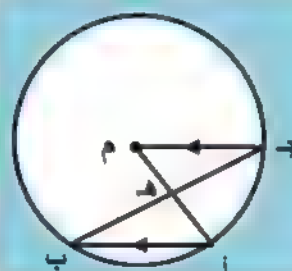
∴ ق (هـ ب ج) المحيطية =  $\frac{1}{2}$  ق (م) المركزية

لأنهما مشتركتان في  $\widehat{أ ج}$  ∴ ق (هـ ب ج) = 60°

∴ أ ب = ب هـ

∴ ق (ب هـ أ) = ق (هـ أ ب) =  $\frac{60}{2}$  = 30°

مثال ١



أ ب وتر في الدائرة م

ج م // أ ب

اثبت ان: ب هـ < أ هـ

الحل

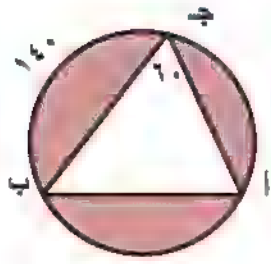
∴ ق (م) = 2 ق (ب)

مركزية ومحيطية مشتركتان في  $\widehat{أ ج}$

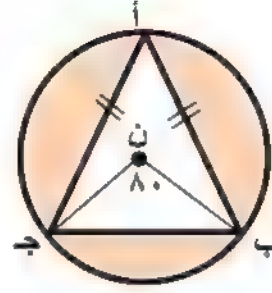
∴ ج م // أ ب ∴ ق (م) = ق (أ) بالتبادل

في  $\triangle أ هـ ب$ : ∴ ق (أ) = 2 ق (ب)

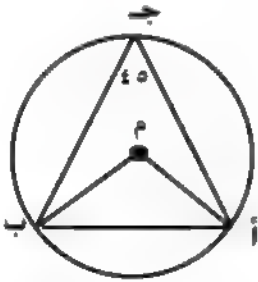
∴ ق (أ) < ق (ب) ∴ ب هـ < أ هـ



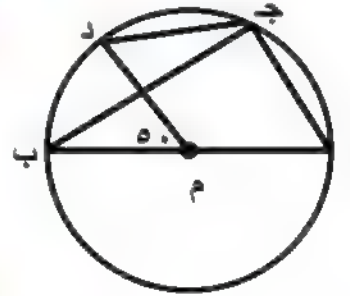
٢ ق (ج) =  $60^\circ$   
ق (ج ب) =  $140^\circ$   
أوجد ق (أ ج)



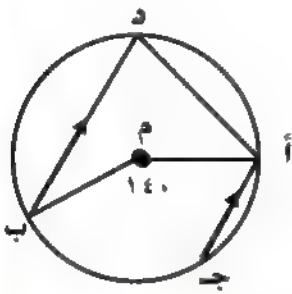
١ أ ب = أ ج ،  
ق (ب ن ج) =  $80^\circ$   
أوجد: (١) ق (أ ب ج)  
(٢) ق (ب ج) الأكبر



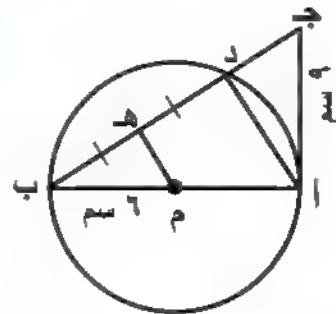
٤ ق (ج) =  $45^\circ$   
أوجد ق (م أ ب)



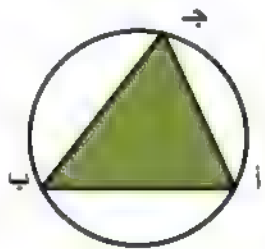
٣ أ ب قطر في الدائرة م  
ق (د م ب) =  $50^\circ$   
أوجد ق (أ ج د)



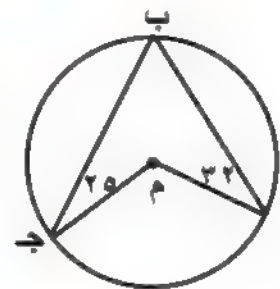
٦ أ ج // د ب  
ق (أ م ب) =  $140^\circ$   
أوجد ق (ج أ د)



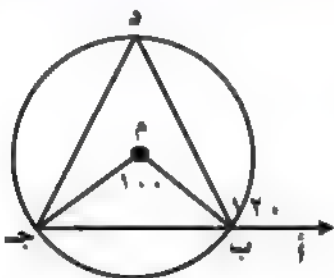
٥ أ ب قطر ، أ ج مماس  
هـ منتصف د ب  
م ب = ٦ سم ، أ ج = ٩ سم  
أوجد طول كل من :  
ب ج ، أ د ، م هـ



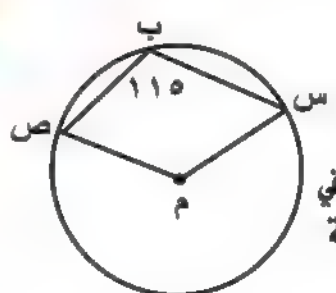
٨ ق (أ ب) : ق (ب ج) : ق (أ ج)  
٣ : ٥ : ٤ =  
أوجد: ق (أ ج ب)



٧ ق (أ) =  $32^\circ$   
ق (ج) =  $25^\circ$   
أوجد : ق (أ م ج)

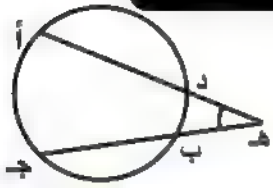


٩ ق (ب م ج) =  $100^\circ$   
ق (أ ب د) =  $120^\circ$   
أوجد ق (د ج ب)



٩ ق (ب) =  $115^\circ$   
أوجد : ق (س م ص)  
عد بالك : ب محيطية تشترك معها في  
القوس زاوية مركزية وهي م المنعكسة

تمرين مشهور ٢



لو تقاطع وتران خارج دائرة

قياس زاوية التقاطع = نصف الطرح

$$\widehat{A} = \frac{1}{2} [\widehat{AC} - \widehat{BC}]$$

قياس القوس الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

$$\widehat{AC} = 2\widehat{A} + \widehat{BC}$$

قياس القوس الأصغر = الأكبر - ضعف الزاوية

$$\widehat{BC} = \widehat{AC} - 2\widehat{A}$$

تدريب 4



اوحد قيمة ص

تدريب 3



اوحد قيمة س

تمرين مشهور ١



لو تقاطع وتران داخل دائرة

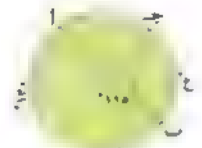
قياس زاوية التقاطع = نصف المجموع

$$\widehat{A} = \frac{1}{2} [\widehat{BC} + \widehat{DE}]$$

قياس القوس المجهول = ضعف الزاوية - المعلوم

$$\widehat{BC} = 2\widehat{A} - \widehat{DE}$$

تدريب 2



اوحد قيمة ع

تدريب 1



اوحد قيمة س

مثال ٢

في الشكل المقابل:

$$\widehat{A} = 30^\circ, \widehat{BC} = 44^\circ$$

$$\widehat{AC} = 48^\circ$$

أوجد: ١-  $\widehat{AC}$

٢-  $\widehat{BC}$

الحل

من تمرين مشهور ٢:

$$\widehat{AC} = 2\widehat{A} + \widehat{BC}$$

$$\therefore \widehat{AC} = 48 = 44 + 30 \times 2$$

$$\therefore \widehat{AC} = 48 \text{ المحيطية}$$

$$\therefore \widehat{BC} = 48 \times 2 = 96$$

$$\therefore \text{قياس الدائرة} = 360$$

$$\therefore \widehat{BC} = 360 - (96 + 48 + 44) = 116$$

مثال ١

في الشكل المقابل:

$$\widehat{AB} = 110^\circ$$

$$\widehat{AC} = 110^\circ$$

$$\widehat{BC} = 110^\circ$$

أوجد  $\widehat{AC}$

الحل

من تمرين مشهور ١:

$$\widehat{AC} = 2\widehat{A} - \widehat{BC}$$

$$= 120 - 110 \times 2$$

$$\therefore \widehat{AC} = 120 \text{ المحيطية}$$

$$\therefore \widehat{AC} = \frac{120}{2} = 60$$



# نوريات على نورين وشهوار ٢٠١

٢ في الشكل المقابل :

ق (ا) =  $40^\circ$   
 ق (ب ج) = ق (د ه)  
 أوجد : ١) ق (ج ه)  
 ٢) ق (ب ج)

الحل

١ في الشكل المقابل :

ق (ا) =  $35^\circ$   
 ق (ا ه د) =  $115^\circ$   
 أوجد : ق (ا د)

الحل

٤ في الشكل المقابل :

ق (ا) =  $40^\circ$   
 ق (ب ج د) =  $26^\circ$   
 أوجد : ١) ق (ج ه)  
 ٢) ق (ه س ج)

الحل

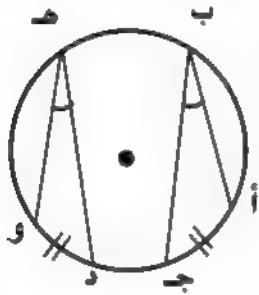
٣ في الشكل المقابل :

ق (ب و د) =  $55^\circ$   
 ق (ا ج) =  $150^\circ$   
 أوجد : ١) ق (ب د)  
 ٢) ق (ا) ، ق (ه)

الحل

# الزوايا المحيطية المشتركة في القوس

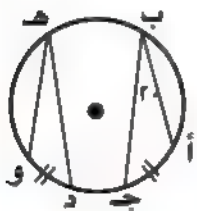
الزوايا المحيطية التي أقواسها متساوية تكون متساوية في القياس



$$\begin{aligned} \therefore \text{ق}(\widehat{أج}) &= \text{ق}(\widehat{دو}) \\ \therefore \text{ق}(\widehat{ب}) &= \text{ق}(\widehat{هـ}) \\ &(\text{والعكس صحيح}) \end{aligned}$$

**نص** **موضوع**  
معلم اول رياضيات

فمثلا : في الشكل المقابل :

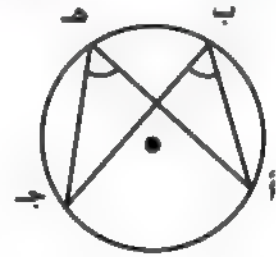


$$\therefore \text{ق}(\widehat{أبج}) = 20^\circ$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{دهو}) = \dots\dots\dots$$

السبب : .....

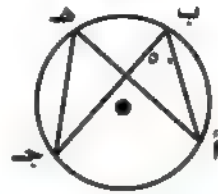
الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس متساوية في القياس



$$\begin{aligned} \therefore \text{ق}(\widehat{ب}) &= \text{ق}(\widehat{هـ}) \\ \text{محيطيتان مشتركتان في القوس أ ج} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{كذلك: } \text{ق}(\widehat{أ}) &= \text{ق}(\widehat{ج}) \\ \text{محيطيتان مشتركتان في القوس ب هـ} \end{aligned}$$

فمثلا : في الشكل المقابل :



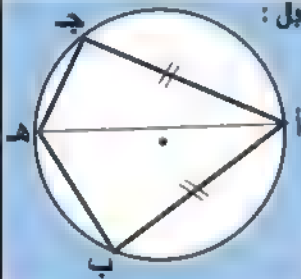
$$\therefore \text{ق}(\widehat{أبج}) = 50^\circ$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{أهـج}) = \dots\dots\dots$$

السبب : .....

**مثال ٢**

في الشكل المقابل :



$$\text{أ ب} = \text{أ ج}$$

$$\text{هـ} \supset \text{ب ج}$$

اثبت أن :

$$\text{ق}(\widehat{أهـب}) = \text{ق}(\widehat{أهـج})$$

**الحل**

$$\therefore \text{أ ب} = \text{أ ج} \quad \text{أوتار متساوية}$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{أب}) = \text{ق}(\widehat{أج}) \quad \text{أقواس متساوية}$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{أهـب}) = \text{ق}(\widehat{أهـج})$$

هـ ط ث

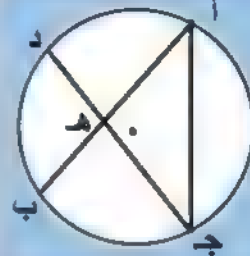
القاعد الأولى: إذا كانت الأوتار متساوية فإن الأقواس متساوية

القاعدة الثانية: إذا كانت الأقواس متساوية فإن الزوايا المحيطية

المرسومة عليها متساوية

**مثال ١**

في الشكل المقابل :



$$\text{أ ب} ، \text{ج د} \text{ وتران متساويان}$$

في الطول

اثبت أن :

$$\Delta \text{ أ ج هـ متساوي الساقين}$$

**الحل**

$$\therefore \text{أ ب} = \text{ج د} \quad \therefore \text{ق}(\widehat{أب}) = \text{ق}(\widehat{ج د})$$

ب طرح ق (د ب) من الطرفين

$$\therefore \text{ق}(\widehat{أ د}) = \text{ق}(\widehat{ب ج})$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{ج}) = \text{ق}(\widehat{أ})$$

$$\therefore \Delta \text{ أ ج هـ متساوي الساقين}$$

٢ في الشكل المقابل :  
 أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع  
 مرسوم داخل دائرة  
 أ د = د هـ  
 أثبت أن :  
 Δ أ د هـ متساوي الأضلاع

**الحل**

∵ Δ أ ب ج متساوي الأضلاع  
 ∴ ق (ب) = ٦٠°  
 ∴ ق (د) = ق (ب) = ٦٠° محيطتان مشتركتان في أ ج  
 ∴ Δ أ د هـ متساوي الساقين  
 ∴ ق (د أ هـ) = ق (د هـ أ) = ٦٠°  
 ∴ Δ أ د هـ متساوي الأضلاع  
 هـ ط ط

٤ في الشكل المقابل :  
 أ د ب هـ وتران متساويان في  
 الطول في الدائرة  
 أ د ∩ ب هـ = { ج }  
 أثبت أن : ج د = ج هـ

∵ أ د = ب هـ ∴ ق (أ د) = ق (ب هـ)  
 وبإضافة ق (د هـ) للطرفين  
 ∴ ق (أ هـ) = ق (ب د)  
 ∴ ق (ب) = ق (أ) ∴ ج أ = ج ب  
 في Δ ج أ ب :  
 ∴ ج أ = ج ب ، د أ = هـ ب  
 بالطرح ينتج أن : ج د = ج هـ

١ في الشكل المقابل :  
 أ ب ج د مثلث مرسوم  
 داخل دائرة  
 د هـ // ب ج  
 أثبت أن :  
 ق (د أ ج) = ق (ب أ هـ)

**الحل**

∵ د هـ // ب ج ∴ ق (د ب) = ق (هـ ج)  
 ∴ ق (د أ ب) المحيطية = ق (هـ أ ج) المحيطية  
 لأنهما محيطتان أقواسهما متساوية  
 وبإضافة ق (ب أ ج) للطرفين  
 ∴ ق (د أ ج) = ق (ب أ هـ) هـ ط ط

٣ في الشكل المقابل :  
 أ ب ∩ ج د = { هـ }  
 هـ أ = هـ د  
 أثبت أن : هـ ب = هـ ج

∵ هـ أ = هـ د ∴ ق (أ) = ق (د)  
 ∴ ق (أ) = ق (د) محيطتان مشتركتان في د ب  
 ، ق (د) = ق (ب) محيطتان مشتركتان في أ ج  
 ∴ ق (ج) = ق (ب)  
 ∴ Δ هـ ج ب متساوي الساقين ∴ هـ ب = هـ ج

٥ هو الشكل المقابل :

أب قطر في الدائرة م  
 ب ه مماس للدائرة  
 ق (ب ج د) =  $25^\circ$   
 أوجد بالبرهان ق (أ ه ب)

الحل

ب ه مماس ، أب قطر

$$\therefore \text{ق (ه ب أ)} = 90^\circ$$

ب ق (أ) = ق (ج د) محيطتان مشتركتان في د ب

$$\therefore \text{ق (أ)} = 25^\circ$$

في  $\triangle \text{ه ب أ}$  :

$$\text{ق (أ ه ب)} = 180^\circ - (25^\circ + 90^\circ) = 65^\circ$$

٦

ق (أ) =  $30^\circ$   
 ق (ج د) =  $20^\circ$   
 أوجد: ق (أ ب ه)

الحل

٧

أ ب ج د فيه  
 أ ب = أ ج  
 اثبت أن :  
 ق (د ب) = ق (ه ج)

الحل

٨

اثبت أن :  
 ق (ه ب ج) = ق (و ب د)

الحل



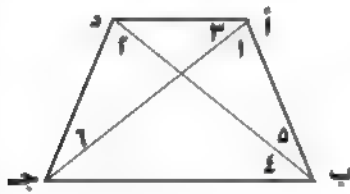


الشكل الرباعي الدائري : هو شكل رباعي تنتمي رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة .

أي يمكن رسم دائرة واحدة تمر برؤوسه الأربعة

لو عرفت ان الشكل رباعي دائري (سواء هو قاطع في المسألة أو لقيت رؤوسه الأربعة تقع على الدائرة) استنتج ٣ حاجات :

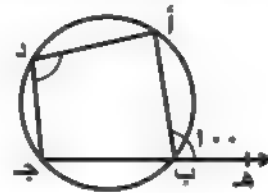
أي زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها متساويتان



إذا كان أ ب ج د رباعي دائري فإن:

$$\begin{aligned} \text{ق (1)} &= \text{ق (2)} \quad \text{مرسومتان على ب ج} \\ \text{ق (3)} &= \text{ق (4)} \quad \text{مرسومتان على د ج} \\ \text{ق (5)} &= \text{ق (6)} \quad \text{مرسومتان على أ د} \end{aligned}$$

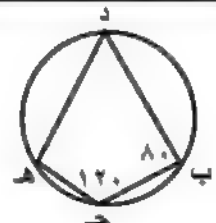
قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة



∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

$$\begin{aligned} \text{∴ ق (أ ب هـ) الخارجة} &= \text{ق (د)} \\ \text{∴ ق (د)} &= 100 \end{aligned}$$

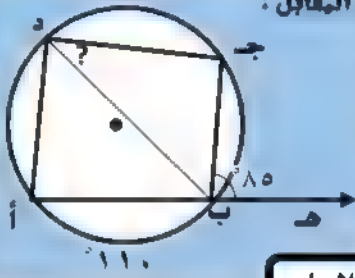
كل زاويتان متقابلتان مجموعهما = 180°



∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

$$\begin{aligned} \text{∴ ق (ب)} + \text{ق (د)} &= 180 \\ \text{ق (د)} + \text{ق (ج)} &= 180 \\ \text{∴ ق (د)} &= 180 - 120 = 60 \\ \text{∴ ق (هـ)} &= 180 - 80 = 100 \end{aligned}$$

مثال ٢ : هو الشكل المقابل :



هـ ∩ أ ب

$$\begin{aligned} \text{ق (أ ب)} &= 110 \\ \text{ق (ج ب هـ)} &= 85 \\ \text{أوجد ق (ب د ج)} \end{aligned}$$

الحل

$$\text{∴ ق (أ ب)} = 110$$

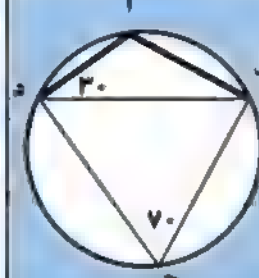
$$\text{∴ ق (ب د أ) المحيطية} = \frac{1}{4} \text{ ق (أ ب)} = \frac{110}{4} = 27.5$$

∴ ج ب هـ خارجة عن الرباعي الدائري أ ب ج د

$$\text{∴ ق (ج د أ)} = \text{ق (ج ب هـ)} = 85$$

$$\begin{aligned} \text{∴ ق (ب د ج)} &= \text{ق (ج د أ)} - \text{ق (ب د أ)} \\ &= 85 - 27.5 = 57.5 \end{aligned}$$

مثال ١ : هو الشكل المقابل :



أ ب ج د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، ق (ج د) = 70° ، ق (أ د ب) = 30° أوجد : ق (أ ب د)

الحل

∴ أ ب ج د رباعي دائري

$$\text{∴ ق (أ)} + \text{ق (ج)} = 180$$

$$\text{∴ ق (أ)} = 180 - 70 = 110$$

في Δ أ ب د :

$$\text{ق (أ ب د)} = 180 - (30 + 110) = 40$$

٣ في الشكل المقابل :



الحل

∴  $\widehat{ABH}$  زاوية خارجة عن الرباعي الدائري ABCD

$$\therefore \widehat{D} = \widehat{ABH} = 100^\circ$$

في  $\triangle ADH$ :

$$\widehat{D} = 180^\circ - (100^\circ + 40^\circ) = 40^\circ$$

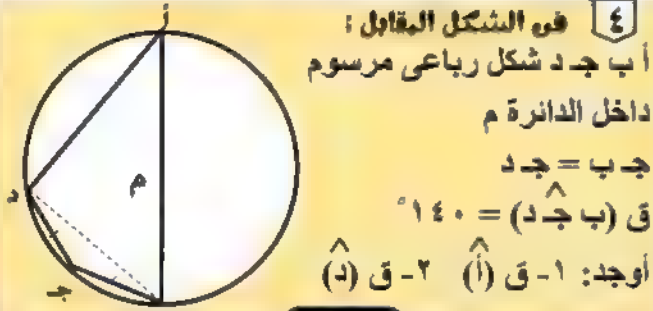
$$\therefore \widehat{D} = \widehat{BCD} = 40^\circ$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{DH}$$

$$\therefore \widehat{D} = \widehat{HAD}$$

هـ ط ث

٤ في الشكل المقابل :



الحل

العمل نرسم ب د

∴ الشكل ABCD رباعي دائري

$$\therefore \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\therefore \widehat{C} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

المعطوب الاول

في  $\triangle ABC$ :

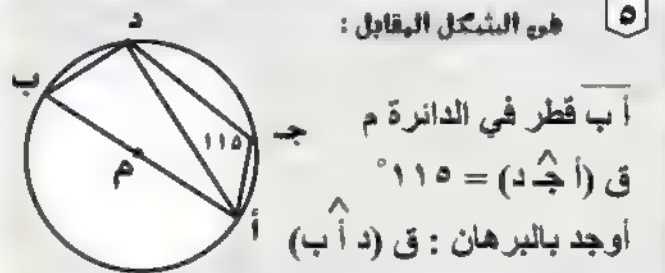
$$\therefore \widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$$

$$\therefore \widehat{B} = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$$

$$\therefore \widehat{B} = 90^\circ$$

$$\therefore \widehat{D} = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$$

٥ في الشكل المقابل :

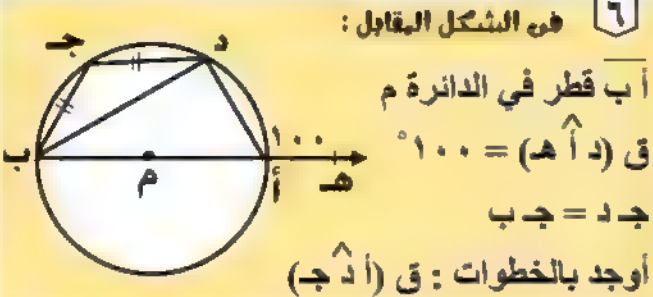


أ ب قطر في الدائرة م

$$\widehat{A} = 115^\circ$$

أوجد بالبرهان :  $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$

٦ في الشكل المقابل :



أ ب قطر في الدائرة م

$$\widehat{A} = 100^\circ$$

$$\widehat{B} = \widehat{C}$$

أوجد بالخطوات :  $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$

# إثبات أن الشكل رباعي دائري

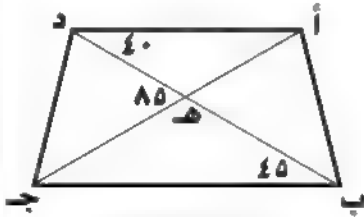


لو قالك اثبت أن الشكل رباعي دائري إبحث عن إحدى الحالات الثلاثة الآتية واثبتها:

**زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة ومتساويتان**

**مثال لذيق**

في الشكل المقابل عايزين نثبت  
أن : أ ب ج د رباعي دائري



**طريقة الحل**

شايف الزاوية ٨٥ ؟

دى خارجة عن  $\triangle$  ه ب ج

$\therefore \angle (ه ب ج) = 85 - 45 = 40 = \angle أ$

كده ظهر لنا زاويتين متساويتين

ومرسومتين على قاعدة واحدة

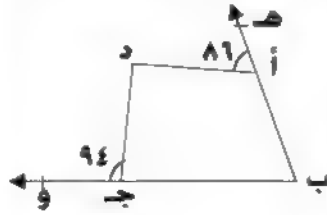
وهما ق(أ د ب) = ق(أ ج ب)

$\therefore$  الشكل رباعي دائري

**زاوية خارجة قياسها = قياس المقابلة للمجاورة**

**مثال لذيق**

في الشكل المقابل عايزين نثبت  
أن : أ ب ج د رباعي دائري



**طريقة الحل**

شايف الزاوية ٩٤ ؟

هي واللى جنبها زاوية مستقيمة

$\therefore \angle (د ج ب) = 180 - 94 = 86$

كده ظهر لنا زاويتين متساويتين

الخارجة = المقابلة للمجاورة

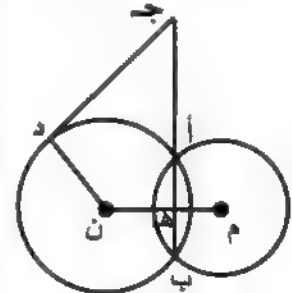
وهما ق(ه أ د) = ق(د ج ب)

$\therefore$  الشكل رباعي دائري

**زاويتان متقابلتان**  
واثبت أن :  
مجموعهما = ١٨٠

**مثال لذيق**

في الشكل المقابل عايزين نثبت  
أن : ج ه ن د رباعي دائري



**طريقة الحل**

في الشكل ج ه ن د

ق(د) = ٩٠ = عشان المماس

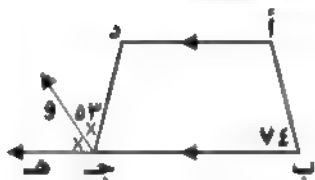
ق(ه) = ٩٠ = عشان الوتر المشترك

و الزاويتين د ، ه متقابلتين

ولو جمعناهم = ١٨٠

$\therefore$  الشكل رباعي دائري

**حاول بنفسك**



في الشكل المقابل :

أ د // ب ج

ج وينصف د ج ه

ق(د ج و) = ٥٣

ق(ب) = ٧٤

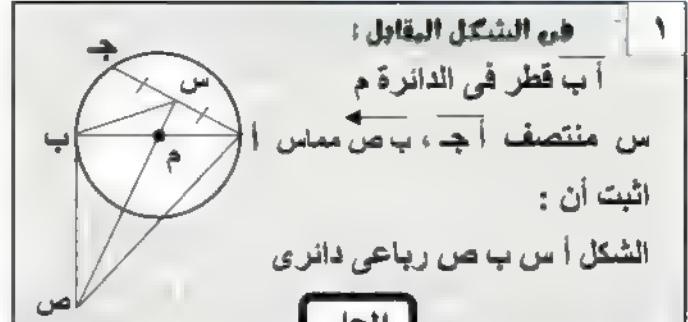
اثبت أن : أ ب ج د رباعي دائري

**سؤال مهم :**

اذكر ٣ حالات يكون فيها الشكل الرباعي دائرياً ؟

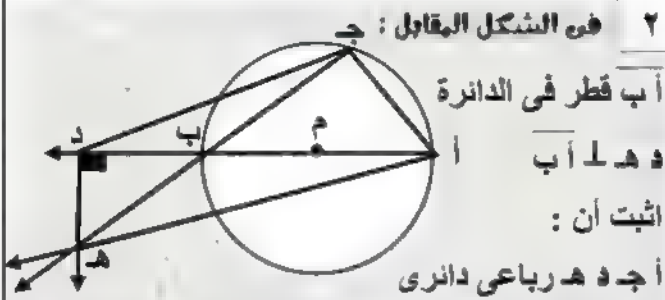
**الإجابة :**

- ١- إذا وجد زاويتان متقابلتان متكاملتان
- ٢- إذا وجد زاوية خارجة قياسها = المقابلة للمجاورة
- ٣- إذا وجد زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها ومتساويتان



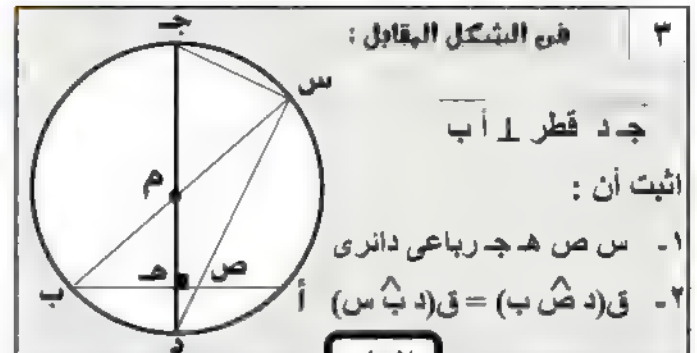
الحل

∵ س منتصف أ ج ∴ م س ⊥ أ ج  
∴ ق (أ س م) = ٩٠°  
∴ ب ص مماس ، أ ب قطر ∴ أ ب ⊥ ب ص  
∴ ق (م ب ص) = ٩٠°  
من ١ ، ٢ ينتج أن :  
ق (أ س ص) = ق (أ ب ص)  
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي أ ص  
وفي جهة واحدة منها  
∴ أ س ب ص رباعي دائري



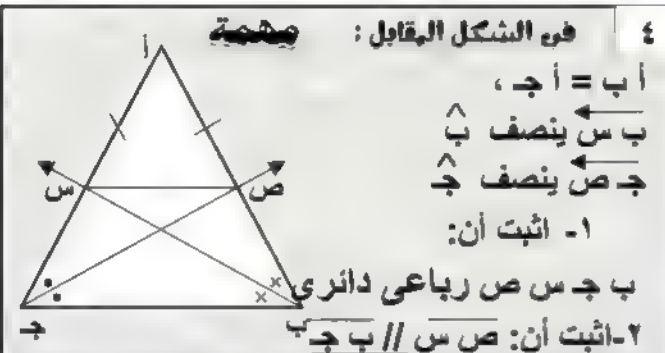
الحل

∵ د ه ⊥ أ د ∴ ق (أ د ه) = ٩٠°  
∴ أ ج ب محيطية مرسومة في نصف دائرة  
∴ ق (أ ج ب) = ٩٠°  
من ١ ، ٢ نلاحظ : ق (أ د ه) = ق (أ ج ب)  
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي أ ه  
وفي جهة واحدة منها  
∴ الشكل أ ج د ه رباعي دائري



الحل

∵ ج د ⊥ أ ب ∴ ق (ج د ه ص) = ٩٠°  
∴ ق (ج د س د) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة  
∴ ق (ج د ه ص) + ق (ج د س د) = ١٨٠° (متقابلتان متكاملتان)  
∴ س ص ه ج رباعي دائري  
المطلوب الأول  
∴ ق (د ص ب) = ق (ج د ه ص)  
لأن قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة  
∴ ق (د ب أ س) = ق (ج د ه ص)  
لأنهما محيطيتان مشتركتان في س د  
من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (د ص ب) = ق (د ب أ س)

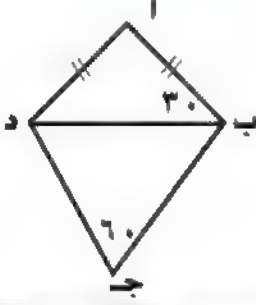


الحل

∵ أ ب = أ ج ∴ ق (ب) = ق (ج)  
∴ ق (ب) = ق (ج) ∴ ق (ب) = ق (ج)  
∴ ق (ص ب س) = ق (ص ج س)  
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة  
∴ ب ج س ص رباعي دائري  
المطلوب الأول  
∴ ب ج س ص رباعي دائري  
∴ ق (أ ص س) الخارجة = ق (ج د ه ص) المقابلة للمجاورة  
∴ ق (أ ص س) = ق (ب) وهما في وضع تناظر  
∴ ص س // ب ج



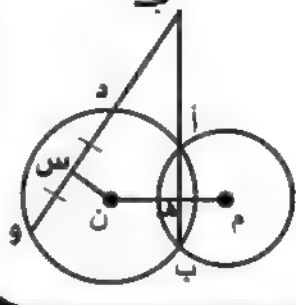
٢



أب = أ د  
ق (أ ب د) = ٣٠°  
ق (ج د) = ٦٠°  
اثبت أن : الشكل  
أ ب ج د رباعي دائري

الحل

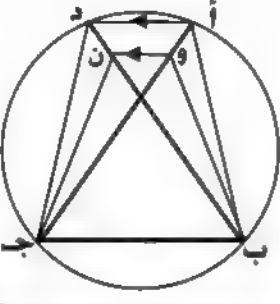
١



م ، دائرتان متقاطعتان  
س منتصف د و  
اثبت أن : الشكل  
ج د ه ن س رباعي دائري

الحل

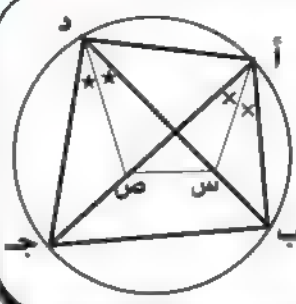
٤



أ د // و ن  
اثبت أن :  
(١) ب و ن ج رباعي دائري  
(٢) ق (و ب ن) = ق (و ج ن)

الحل

٣



أ س ينصف د ب أ ج  
د ص ينصف د ب د ج  
اثبت أن : الشكل  
(١) أ س ص د رباعي دائري  
(٢) س ص // ب ج

الحل

في الشكل المقابل :

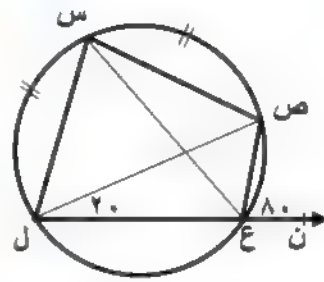
س منتصف ص ل

ق (ص ع ن) = ٨٠

ق (ص ل ع) = ٢٠

أوجد : (١) ق (ع س ل)

(٢) ق (س ص ع)



في الشكل المقابل :

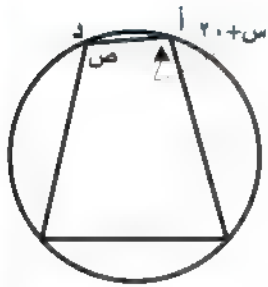
ق (ب) = ٧٠

ق (ج) = ٨٠

ق (د) = ص

ق (أ) = س + ٢٠

أوجد قيمتي س ، ص



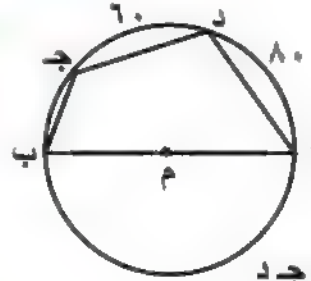
في الشكل المقابل :

أب قطر في الدائرة م

ق (أ د) = ٨٠

ق (د ج) = ٦٠

أوجد قياسات زوايا الشكل أ ب ج د



في الشكل المقابل :

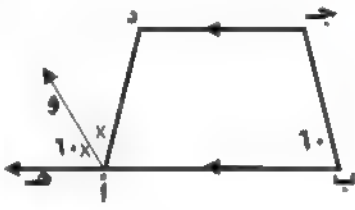
ج د // ب هـ

أو ينصف د أ هـ

ق (و أ هـ) = ٦٠

ق (ب) = ٦٠

اثبت أن: الشكل أ ب ج د رباعي دائري



في الشكل المقابل :

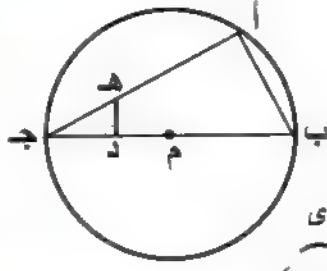
ب ج قطر في الدائرة م

هـ د ⊥ ب ج

اثبت أن:

(١) الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

(٢) ق (د هـ ج) = ١/٤ ق (أ ج)



في الشكل المقابل :

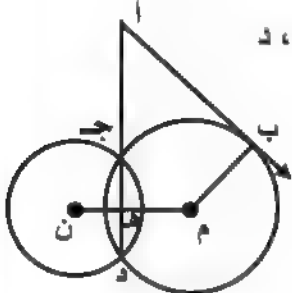
م ، ن دائرتان متقاطعتان في ج ، د

أ ب مماس للدائرة م عند ب

م ن ∩ ج د = { هـ }

اثبت أن :

الشكل أ ب م هـ رباعي دائري



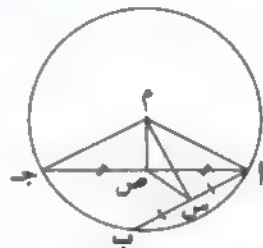
في الشكل المقابل :

س ، ص منتصفا أ ب ، أ ج

على الترتيب

اثبت أن :

أ س ص م رباعي دائري



في الشكل المقابل :

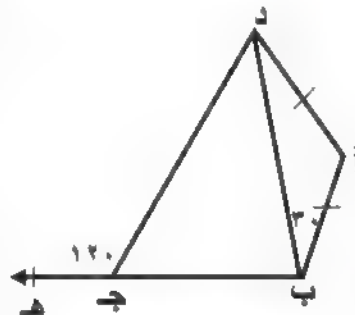
أ د = أ ب

ق (أ ب د) = ٣٠

ق (د ج هـ) = ١٢٠

اثبت أن : الشكل

أ ب ج د رباعي دائري



في الشكل المقابل :

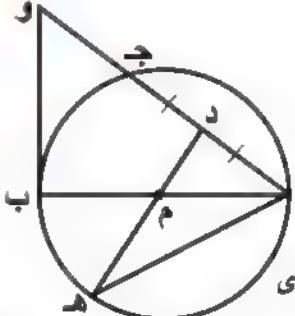
أ ب قطر في الدائرة م

د منتصف أ ج

ب و مماس

اثبت أن : (١) م ب و د رباعي دائري

(٢) ق (و) = ٢ ق (هـ)



في الشكل المقابل :

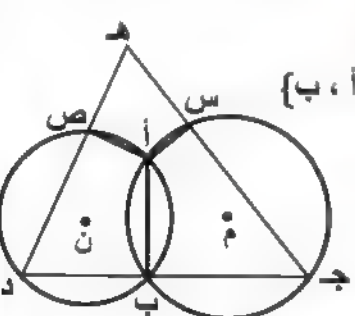
الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

ب ج د

ج س ∩ د ص = { هـ }

اثبت أن

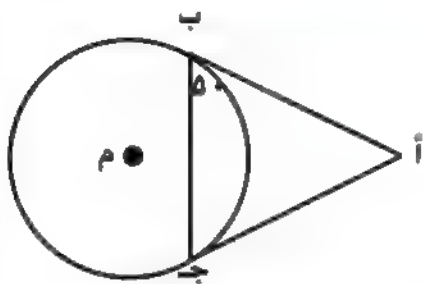
الشكل أ س هـ ص رباعي دائري



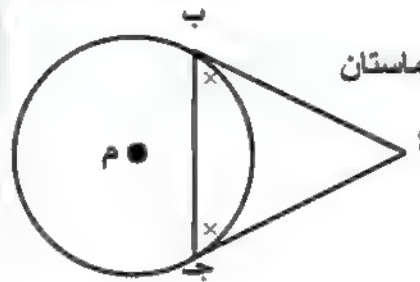
# العلاقة بين مماسات الدائرة



القطعتان المماستان المرسومتان من نقطتي خارج دائرة متساويتان في الطول.



ق (أ) = ..... = ق (ب)

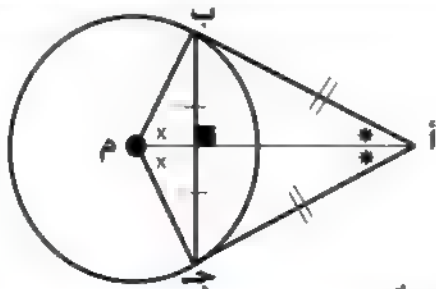


∴  $\overline{AB}$  ،  $\overline{AC}$  قطعتان مماستان

∴  $\overline{AB} = \overline{AC}$

Δ متساوي الساقين

∴ ق (ب) = ق (أ)



♦ م أ ينصف زاوية أ

♦ م أ ينصف زاوية م

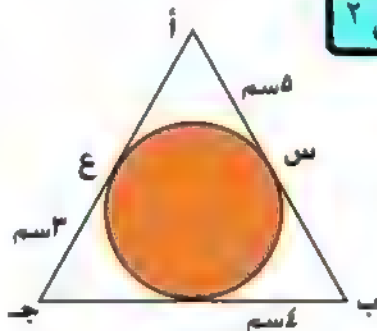
♦ م أ ينصف الوتر ب ج

♦ م أ عمودي على الوتر ب ج

أخلاصة : م أ ينصف زاويتي و وتر

ملاحظة

مثال ٢



Δ أ ب ج يمس الدائرة

من الخارج في س ، ص ، ع

أ س = ٥ سم ، ب ص = ٤ سم

ج ع = ٣ سم

أوجد محيط Δ أ ب ج

الحل

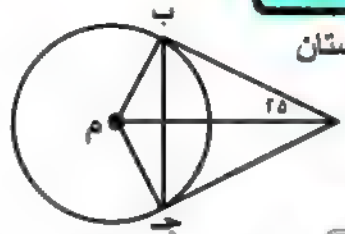
أ س = أ ع = ٥ سم

ب ص = ب ف = ٤ سم

ج ع = ج ف = ٣ سم

أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، ب ج = ٣ + ٤ = ٧ سم ، ج أ = ٣ + ٥ = ٨ سم  
المحيط = ٩ + ٧ + ٨ = ٢٤ سم

مثال ١



أ ب ، أ ج قطعتان مماستان

ق (ب أ ج) = ٢٥°

أوجد : ق (ب م ج)

الحل

∴ أ ب مماسة ، ب م نصف قطر ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

في Δ أ ب م :

ق (أ م ب) = ١٨٠° - (٩٠° + ٣٥°) = ٥٥°

∴ م أ ينصف ∠ ب م ج

∴ ق (ب م ج) = ٢ × ٥٥° = ١١٠°

## عدد المماسات المشتركة

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماسيتين من الداخل ١

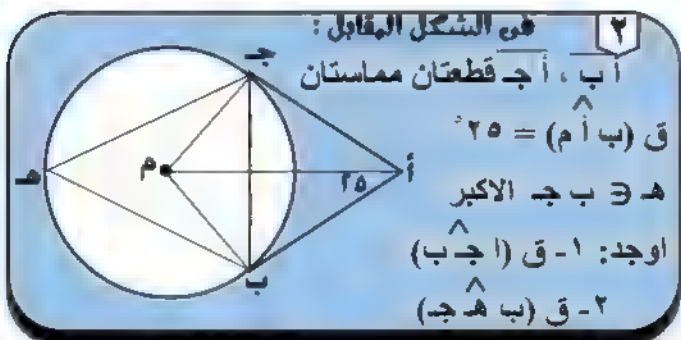
❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين ٤

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متحدثتا المركز صفر

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماسيتين من الخارج ٣

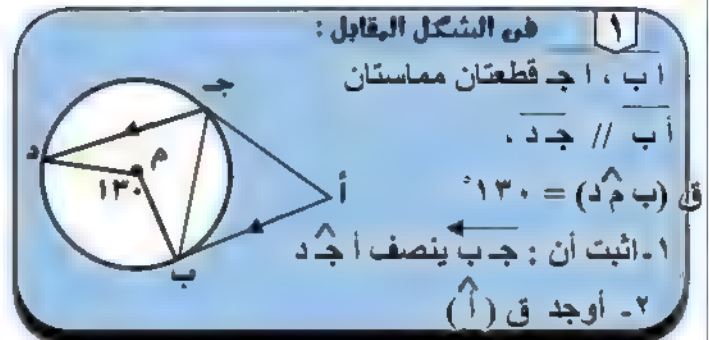
❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتان صفر

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين ٢



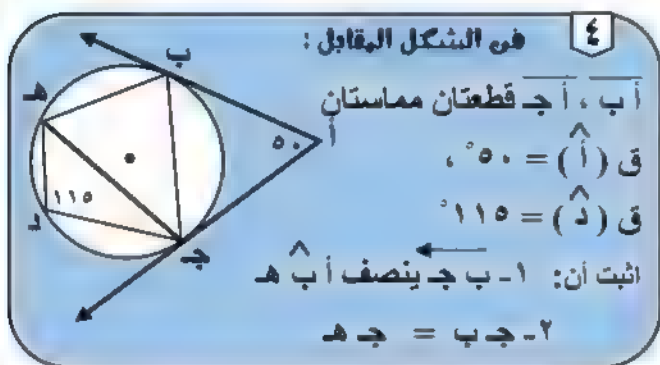
الحل

أ ب، أ ج قطعتان مماستان ∴ م ينصف أ  
∴ ق (أ) =  $2 \times 25 = 50^\circ$   
فـ، أ ج ب: ق (أ ج ب) =  $\frac{50 - 180}{2} = 65^\circ$  المطلوب الأول  
أ ج مماسة، م ج نصف قطر ∴ م ج ⊥ أ ج  
∴ ق (أ ج م) =  $90^\circ$   
كذلك: أ ب مماسة، م ب نصف قطر ∴ م ب ⊥ أ ب  
∴ ق (أ ب م) =  $90^\circ$   
في الشكل الرباعي أ ب م ج  
ق (ج م ب) =  $360 - (90 + 90 + 50) = 130^\circ$   
∴ ق (ب هـ ج) المحيطية =  $\frac{1}{2}$  ق (ب م ج) المركزية =  $65^\circ$



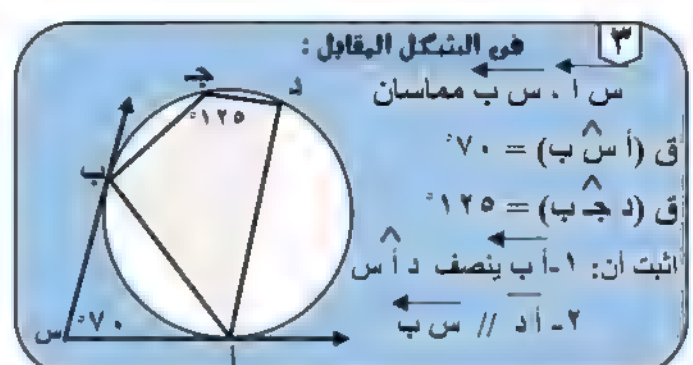
الحل

∴ ق (ب ج د) المحيطية =  $\frac{1}{2}$  ق (م) المركزية  
∴ ق (ب ج د) =  $65^\circ$   
أ ب // ج د  
∴ ق (أ ب ج) = ق (ب ج د) =  $65^\circ$  بالتبادل (١)  
أ ب = ب ج (قطعتان مماستان)  
∴ ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب) =  $65^\circ$  (٢)  
من ١، ٢ ينتج أن: ق (ب ج د) = ق (أ ج ب)  
∴ ج ب ينصف أ ج د المطلوب الأول  
ق (أ) =  $180 - (65 + 65) = 50^\circ$



الحل

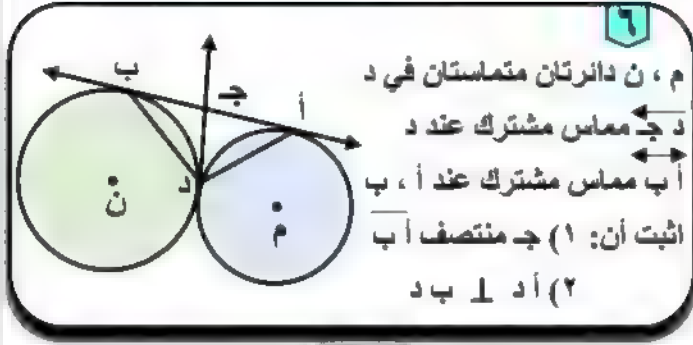
أ ب = أ ج قطعتان مماستان  
∴ ق (أ ب ج) =  $\frac{50 - 180}{2} = 65^\circ$  (١)  
ب ج هـ رباعي دائري  
∴ ق (ج ب هـ) =  $180 - 115 = 65^\circ$  (٢)  
من ١، ٢ ينتج أن: ق (أ ب ج) = ق (ج ب هـ)  
∴ ب ج ينصف أ ب هـ المطلوب الأول  
∴ ق (أ ب ج) المماسية = ق (ج ب هـ) محيطية (٣)  
من ٣، ٢ ينتج أن: ق (ج ب هـ) = ق (ج ب هـ)  
∴ ج ب = ج هـ المطلوب الثاني (٤)



الحل

أ ب ج د رباعي دائري ∴ ق (ج د) + ق (د أ ب) =  $180^\circ$   
∴ ق (د أ ب) =  $180 - 125 = 55^\circ$  (١)  
س أ، س ب مماستان للدائرة ∴ س أ = س ب  
∴ Δ س أ ب متساوي الساقين  
∴ ق (س أ ب) =  $\frac{70 - 180}{2} = 55^\circ$  (٢)  
من ١، ٢ ينتج أن: ق (د أ ب) = ق (س أ ب)  
∴ أ ب ينصف د أ س المطلوب الأول  
∴ ق (د أ س) =  $55 + 55 = 110^\circ$   
∴ ق (د أ س) + ق (س ب) =  $110 + 70 = 180^\circ$  وهما متداخلتان  
∴ أ د // س ب





الحل

في الدائرة م :: ج د ، ج أ قطعان مماستان  
:: ج د = ج أ (١)

في الدائرة ن :: ج د ، ج ب قطعان مماستان  
:: ج د = ج ب (٢)

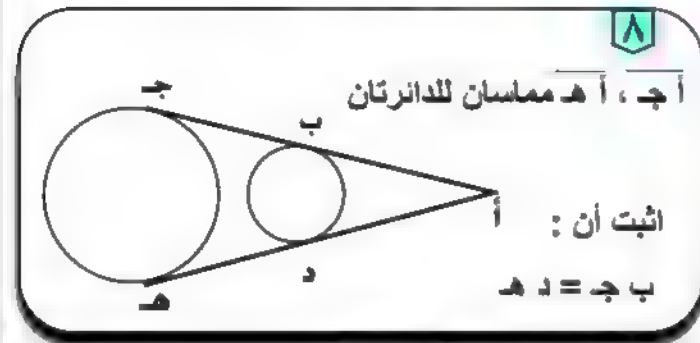
من ١ ، ٢ ينتج أن: ج أ = ج ب

:: ج منتصف أ ب المطلوب الأول

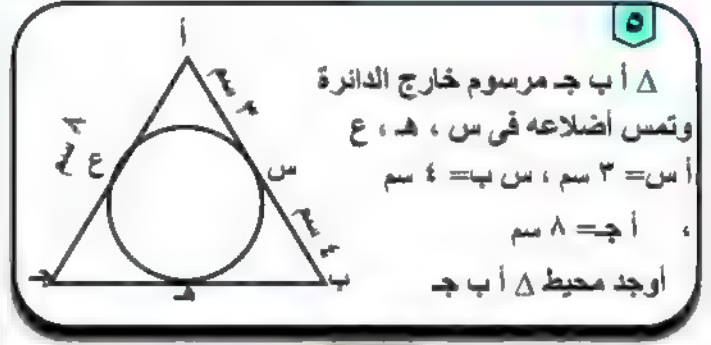
في  $\Delta$  أ د ب : :: ج منتصف أ ب :: د ج متوسط

:: د ج =  $\frac{1}{2}$  أ ب :: د ج خارج من زاوية قائمة

:: أ د  $\perp$  أ ب د المطلوب الثاني



الحل



الحل

:: أ س = أ ع قطعان مماستان

:: أ ع = ٣ سم

:: ع ج = ٨ - ٤ = ٤ سم

:: ج د = ج ه قطعان مماستان

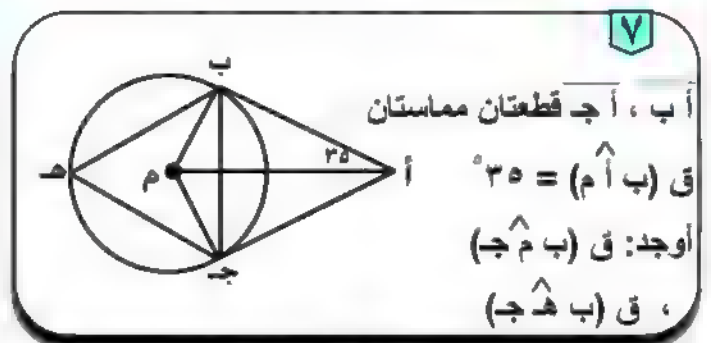
:: ج د = ج ه = ٥ سم

:: ب ه = ب س قطعان مماستان

:: ب ه = ب س = ٤ سم

:: ب ج = ٤ + ٥ = ٩ سم

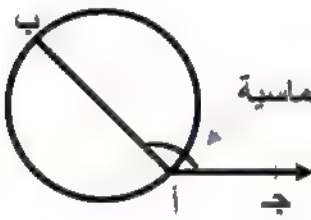
:: محيط = ٩ + ٨ + ٧ = ٢٤ سم



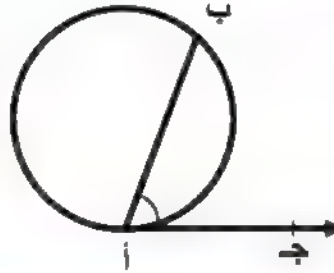
الحل

هي زاوية رأسها على الدائرة ومحصورة بين وتر ومماس

الزاوية المماسية



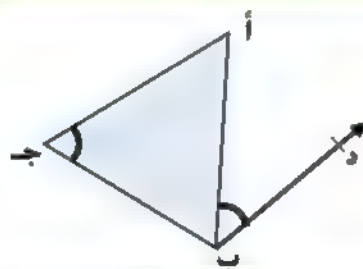
الزاوية دي ليست مماسية  
تقدر تقول ليه؟



- ب أ ج زاوية مماسية
- القوس المقابل لها هو أ ب

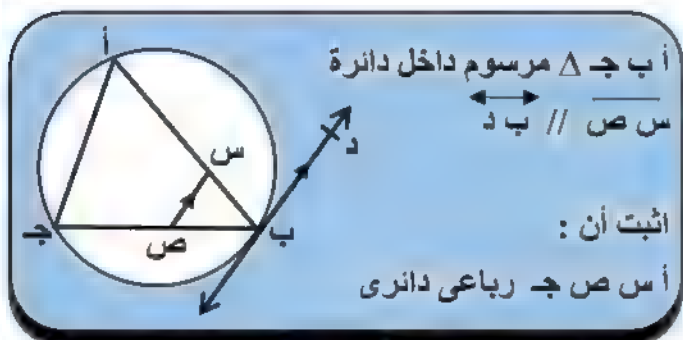
قياس الزاوية المماسية = نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = نصف قياس القوس المقابل لها زى المحيطية بالظبط
<p>ق (ج أ ب) المماسية = <math>\frac{1}{2}</math> ق (م) المركزية مشتركتان في ج أ ∴ ق (ج أ ب) = <math>49^\circ</math></p>	<p>ق (ج أ ب) المماسية = ق (د) المحيطية مشتركتان في ج أ ∴ ق (ج أ ب) = <math>65^\circ</math></p>	<p>ق (أ ب ج) المماسية = <math>\frac{1}{2}</math> ق (ب ج) ∴ ق (أ ب ج) = <math>70^\circ</math></p>

لإثبات أن ب د مماس للدائرة التي تمر برؤوس  $\triangle$  أ ب ج



نثبت أن :

$$\text{ق (أ ب د)} = \text{ق (ج د)}$$



### الحل

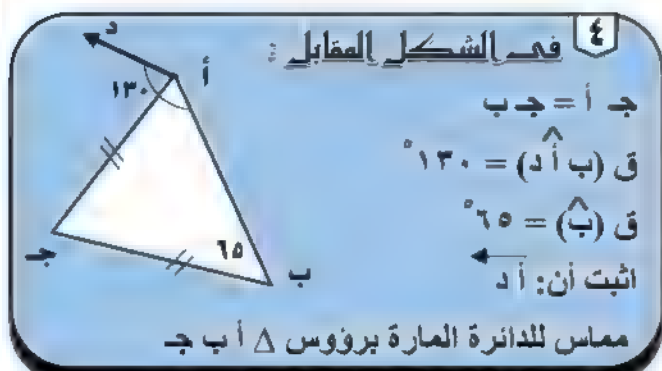
س: س: //

- ١) ق (أ ب د) = ق (ص س ب) بالتبادل  
٢) ق (أ ب د) = ق (ج) المحيطية

من ١، ٢ ينتج أن :

ق (ص س ب) = ق (ج)

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة  
 ∴ الشكل أس ص ج رباعي دائري



## الحل

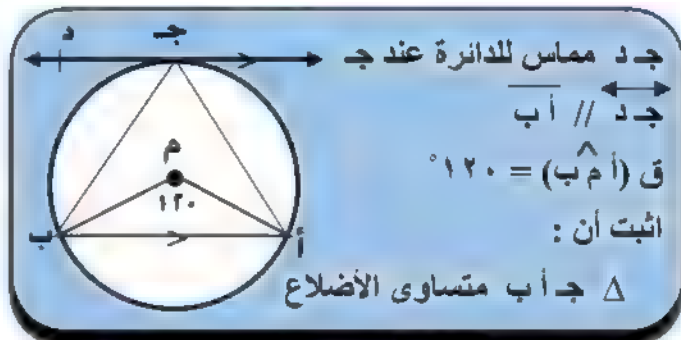
$$\underline{b} \cdot \underline{c} = |\underline{c}| \cdot \cos \theta$$

$$\therefore ق(ج\hat{ا}ب) = ق(ب\hat{ا}ج) = ٦٥$$

$$\therefore \text{ق (د ا ج)} = 130 - 65 = 65$$

$$\therefore \text{ق (د ا ج)} = \text{ق (ب)}$$

∴ أ د مماس للدائرة المارة بـ  $\Delta$  أ ب ج ←



## الحل

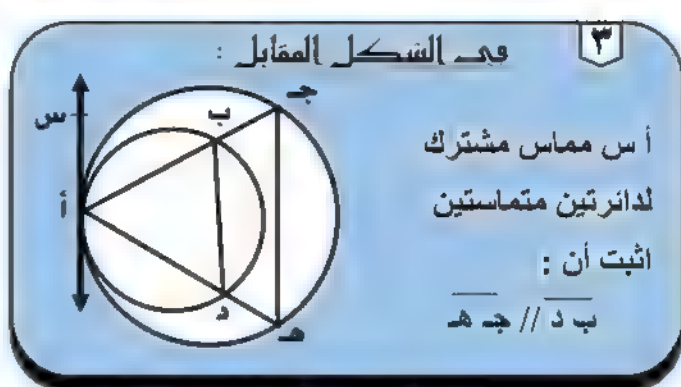
→ ← :: جَدُّ // اَبٌ

- ١)  $\therefore ق (د ج ب) = ق (ج ب أ)$  بالتبادل

من ۱، ۲ بنتج ان:  $q = (ج\hat{ا}) = ق (ج\hat{ا}ب)$

**Δ. جواب مسئلوی التباہین**

∴ ق (م) المركزية = ١٢٠ ° ∴ ق (ا ج ب) = ٦٠ °  
 ∴ ∆ ج ا ب متساوی الأضلاع



### في الدائرة الصغرى :

- ∴ ق (س أب) المماسية = ق (أ دب) المحيطية ← (١)  
مشتريتان في القوس أب

### في الدائرة الكبرى :

- ق (س أ ج) المماسية = ق (أ هـ ج) المحيطية ← (٢)
- لأنهما مشتركتان في القوس أ ج

من ١، ٢ ينتج أن :

ق (أ د ب) = ق (أ هـ ج) وهما في وضع تناظر  
 ∴  $\overline{ب د} // \overline{ج هـ}$

١

دائرة تمس أضلاع  $\triangle$  س ص ع  
في أ، ب، ج، ق (ص) =  $40^\circ$   
ق (ع) =  $64^\circ$   
أوجد قياسات زوايا  $\triangle$  أ ب ج

الحل

٢

أ ب، أ ج قطعتان ممستان  
ب ج = ب د  
ق (أ) =  $70^\circ$   
أوجد: ق (أ ب د)

الحل

٣

أ ب ج قائم في أ  
ق (د أ ب) =  $60^\circ$ ، أ ج = ٤ سم  
ب ج = ٨ سم، أثبت أن: ب  
أ د مماس للدائرة المارة بؤوس أ ب ج

الحل

٤

أ ب ج  $\triangle$  مرسوم داخل دائرة  
أ د مماس للدائرة  
س ص // ب ج  
اثبت أن: أ د مماس للدائرة  
المارة بؤوس أ س ص

الحل



# أسئلة اختر على الهندسة

- ٥ عدد محاور التماثل لأي دائرة هو .....  
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي
- ٦ عدد محاور تماثل نصف الدائرة هو .....  
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي
- ٣ وتر طوله ٨ سم في دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها ..... سم  
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٨
- ٤ إذا كان المستقيم  $l$   $\cap$  الدائرة  $m = \emptyset$  فإن المستقيم  $l$  يكون .....  
 (أ) محور تماثل (ب) خارج (ج) قاطع (د) مماس
- ٥ إذا كان المستقيم مماساً للدائرة التي قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها ..... سم  
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨
- ٦ دائرة محيطها ٦  $\pi$  سم والمستقيم  $l$  يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم  $l$  يكون .....  
 (أ) مماس للدائرة (ب) قاطع للدائرة (ج) خارج الدائرة (د) قطر في الدائرة
- ٧ خط المراكزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على ..... وينصفه  
 (أ) القطر (ب) الوتر (ج) الوتر المشترك (د) المماس
- ٨ دائرتان  $m$  ،  $n$  مماستان من الداخل ، أنصاف أقطارهم ٥ سم ، ٩ سم فإن  $m = n$  ..... سم  
 (أ) ١٤ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٩
- ٩  $m$  ،  $n$  دائرتان متقاطعتان وطولان نصفى قطريهما ٥ سم ، ٢ سم فإن  $m = n$  .....  
 (أ) [ ٧ ، ٣ ] (ب) [ ٧ ، ٣ ] (ج) [ ٧ ، ٣ ] (د) [ ٧ ، ٣ ]
- ١٠ إذا كان سطح الدائرة  $m$   $\cap$  سطح الدائرة  $n = \{ أ \}$  وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم ،  $m = n = ٨$  سم  
 فإن طول نصف قطر الأخرى = ..... سم  
 (أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ١١ (د) ١٦
- ١١ إذا كان الدائرتان  $m$  ،  $n$  مماستان من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٥ سم ،  $m = n = ٩$  سم  
 فإن طول نصف قطر الأخرى = ..... سم  
 (أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ١٤
- ١٢  $m$  دائرة طول قطرها ٧ سم ،  $أ$  نقطة في مستوى الدائرة وكان  $m = ٤$  سم فإن  $أ$  تقع .....  
 (أ) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) على الدائرة (د) على مركز الدائرة

١٣ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو .....

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

١٤ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس .....

- (أ) المثلث (ب) المربع (ج) المعين (د) المستطيل

١٥ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس .....

- (أ) معين (ب) مستطيل (ج) شبه منحرف (د) متوازي أضلاع

١٦ مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع .....

- (أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

١٧ مركز الدائرة الخارجة لأي مثلث هو نقطة تقاطع .....

- (أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

١٨ قياس القوس الذي يمثل ثلث قياس الدائرة = .....

- (أ) ٣٦٠ (ب) ١٨٠ (ج) ١٢٠ (د) ٩٠

١٩ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس = .....

- (أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ١ (ج) ١ : ٢ (د) ١ : ٣

٢٠ طول نصف الدائرة التي طول نصف قطرها  $\pi$  سم = ..... سم

- (أ)  $2\pi$  نق (ب)  $\frac{1}{4}\pi$  نق (ج)  $\frac{1}{3}\pi$  نق (د)  $\pi$  نق

٢١ قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة = .....

- (أ)  $45^\circ$  (ب)  $90^\circ$  (ج)  $120^\circ$  (د)  $180^\circ$

٢٢ أ ب ج د شكل رباعي دائري فيه ق (أ) =  $60^\circ$  فإن ق (ج) = .....

- (أ)  $60^\circ$  (ب)  $30^\circ$  (ج)  $90^\circ$  (د)  $120^\circ$

٢٣ إذا كان الشكل أ ب ج د رباعي دائري وكان ق (أ) =  $\frac{1}{4}$  ق (ج) فإن ق (أ) = .....

- (أ)  $90^\circ$  (ب)  $60^\circ$  (ج)  $120^\circ$  (د)  $180^\circ$

٢٤ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج = .....

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٢٥ المماسان المرسومان من نهايتي قطر في دائرة يكونان .....

- (أ) متوازيان (ب) منطبقان (ج) متقاطعان (د) متساويان في الطول

٦٦ الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين .....

- (أ) وتران (ب) مماسان (ج) وتر ومماس (د) وتر وقطر

٦٧ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتان هو .....

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

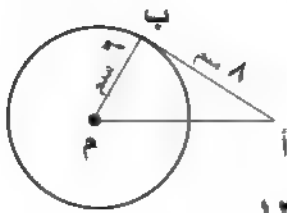
٦٨ الزاوية المحيطية التي تقابل قوساً أصغر في الدائرة تكون .....

- (أ) منعكسة (ب) قائمة (ج) منفرجة (د) حادة

٦٩ الشكل الرباعي الدائري في الأشكال التالية هو .....

- (أ) المعين (ب) المستطيل (ج) متوازي الأضلاع (د) شبه المنحرف

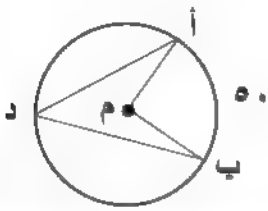
## أسئلة اختر على الرسومات



١ في الشكل المقابل : أ ب مماس للدائرة م

م ب = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم فإن أ م = ..... سم

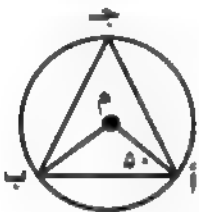
- (أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٢ (د) ١٣



٢ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

إذا كان ق (أ ب) = ٥٠° فإن ق (أ د ب) = .....

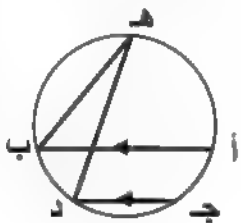
- (أ) ٢٥° (ب) ٥٠° (ج) ١٠٠° (د) ١٥٠°



٣ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

ق (م أ ب) = ٥٠° فإن ق (ج) = .....

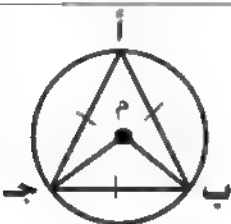
- (أ) ٥٠° (ب) ٨٠° (ج) ٤٠° (د) ٣٠°



٤ في الشكل المقابل : أ ب // ج د

ق (أ ج) = ٣٠° فإن ق (ب هـ د) = .....

- (أ) ١٠° (ب) ١٥° (ج) ٣٠° (د) ٦٠°



٥ في الشكل المقابل : أ ب ج د متساوي الأضلاع

فإن ق (ب م ج) = .....

- (أ) ٥٠° (ب) ٦٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٠٠°





## اختر تراكمي

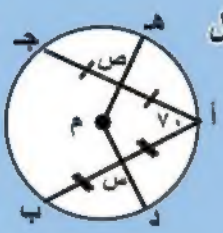
- ١ مساحة المعين الذي طولاً قطريه ٦ سم ، ٨ سم = ..... سم ٢
- الحل: مساحة المعين =  $\frac{1}{2}$  حاصل ضرب طولاً قطريه =  $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$  سم ٢
- ٢ مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث ..... طول الضلع الثالث
- ٣ فى المثلث أ ب ج إذا كان (أ ج) ٢ = (أ ب) ٢ + (ب ج) ٢ فإن زاوية ب تكون .....
- ٤ فى المثلث أ ب ج إذا كان (أ ج) ٢ < (أ ب) ٢ + (ب ج) ٢ فإن زاوية ب تكون .....
- ٥ فى المثلث أ ب ج إذا كان (أ ج) ٢ < (أ ب) ٢ + (ب ج) ٢ فإن زاوية ب تكون .....
- ٦ قياس زاوية الشكل السداسى المنتظم = .....
- ٧ عدد محاور تماثل المربع = ..... ، عدد محاور تماثل المستطيل = .....
- ٨ ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س - ٤ ص + ١٢ = ٠ هو .....
- ٩ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = .....
- ١٥ عدد محاور تماثل نصف الدائرة ..... عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين
- ١٥ القطران المتساويان فى الطول وغير متعامدان فى .....
- ١٢ مربع محيطه ٢٠ سم تكون مساحته = ..... سم ٢
- ١٣ إذا كان أ ب قطر فى دائرة م حيث أ ( ٣ ، - ٥ ) ، ب ( ١ ، ٥ ) فإن مركز الدائرة م هو
- ١٤ دائرة محيطها ٨  $\pi$  فإن طول قطرها = .....
- ١٥ فى المثلث القائم طول المتوسط الخارج من الزاوية القائمة يساوى .....
- ١٦ فى المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى .....
- ١٧ عدد المستطيلات فى الشكل المقابل .....

--	--	--

انتهت المذكرة مع تمنياتى الخالصة لكم بالنجاح والنجاح والاستمرار فى النجاح



٢



أ ب ، أ د وتران متساويان في الطول  
س منتصف أ ب ، ص منتصف أ ج  
ق (ج أ ب) =  $70^\circ$   
١- أوجد ق (د م هـ)  
٢- اثبت أن س د = ص هـ

الحل

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب  
∴ ق (م س أ) =  $90^\circ$

∵ ص منتصف أ ج ∴ م ص ⊥ أ ج  
∴ ق (م ص أ) =  $90^\circ$

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي أ س م ص =  $360^\circ$   
∴ ق (د م هـ) =  $(70 + 90 + 90) - 360 = 110^\circ$

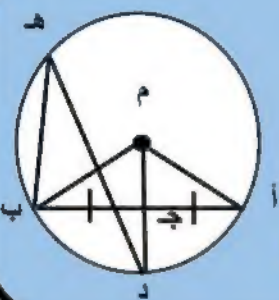
∴ أ ج = أ ب (أوتار متساوية)

∴ م ص = م س (أبعاد متساوية) ← ١

∴ م هـ = م د (أنصاف أقطار) ← ٢

بطرح ١ من ٢ ينتج: ص هـ = س د المطلوب الثاني

٤



ج منتصف أ ب  
ق (م أ ب) =  $20^\circ$   
أوجد: ق (ب هـ د) ، ق (أ د ب)

الحل

∵ م أ = م ب أنصاف أقطار

∴ Δ م أ ب متساوي الساقين ∴ ق (م ب أ) =  $20^\circ$

∵ ج منتصف أ ب ∴ م ج ⊥ أ ب ∴ ق (م ج ب) =  $90^\circ$

في Δ م ج ب: ق (ج م ب) =  $180 - (20 + 90) = 70^\circ$

∴ ق (ب هـ د) =  $\frac{1}{2}$  ق (د م ب)

محيطية ومركزية مشتركتان في أ ب

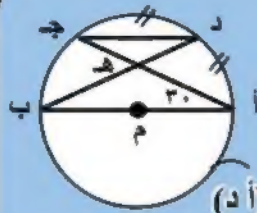
∴ ق (ب هـ د) =  $35^\circ$  المطلوب الأول

في Δ م أ ب: ق (أ م ب) =  $180 - (20 + 20) = 140^\circ$

∴ ق (أ د ب) = ق (أ م ب) المركزية =  $140^\circ$

٤١

١



أ ب قطر في الدائرة م  
ق (ج أ ب) =  $30^\circ$   
د منتصف أ ج  
١- أوجد ق (ب د ج) ، ق (أ د)  
٢- اثبت أن: أ ب // ج د

الحل



∴ ق (ب د ج) = ق (ج أ ب)

محيطيتان مشتركتان في ج ب

∴ ق (ب د ج) =  $30^\circ$  أولاً

∴ ق (ج ب) =  $30 \times 2 = 60^\circ$

∴ ق (أ د ج) + ق (ج ب) =  $180^\circ$

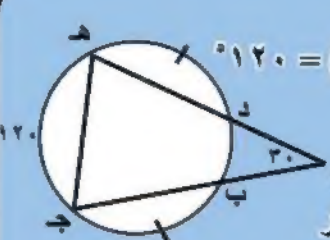
∴ ق (أ د ج) =  $180 - 60 = 120^\circ$

∴ ق (أ د) = ق (د ج) ∴ ق (أ د) =  $\frac{120}{2} = 60^\circ$

∴ ق (د ب أ) المحيطة =  $\frac{60}{2} = 30^\circ$

∴ ق (ب د ج) = ق (د ب أ) وهما متبادلتان ∴ أ ب // ج د

٣



ق (أ) =  $30^\circ$  ، ق (هـ ج) =  $120^\circ$   
ق (ب ج) = ق (د هـ)  
١- أوجد: ق (ب د) الأصغر  
٢- اثبت أن: أ ب = أ د

الحل

من تمرين مشهور ٢ :

ق (ب د) = ق (هـ ج) - ق (أ) =  $120 - 30 = 90^\circ$

∴ ق (د هـ) = ق (ب ج) بإضافة د ب للطرفين

∴ ق (ب د هـ) = ق (د ب ج)

∴ ق (ج هـ) المحيطة = ق (هـ د) المحيطة

∴ أ ج = أ هـ ← ١

∴ ق (د هـ) = ق (ب ج) ∴ د هـ = ب ج ← ٢

بطرح ٢ من ١ ينتج أن: أ ب = أ د





٥

أ ب ج د شكل رباعي فيه  
 $أب = أ د$   
 $ق (أ ب د) = ٣٠^\circ$ ،  $ق (ج د) = ٦٠^\circ$   
 اثبت أن: الشكل أ ب ج د رباعي دائري

الحل

∵  $أب = أ د$  ∴  $\Delta أ ب د$  متساوي الساقين  
 ∴  $ق (أ د ب) = ٣٠^\circ$   
 $ق (أ) = ١٨٠ - (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠^\circ$   
 $ق (أ) + ق (ج د) = ١٢٠ + ٦٠ = ١٨٠^\circ$   
 وهما زاويتان متقابلتان متكاملتان  
 ∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٦

أ و مماس للدائرة عند أ  
 $أ و \parallel د ه$   
 برهن أن:  
 د ه ب ج شكل رباعي دائري

الحل

∵  $أ و \parallel د ه$   
 ∴  $ق (و أ ب) = ق (أ ه د)$  بالتبادل (١)  
 ∴  $ق (و أ ب) = ق (أ ه د)$  بالمماسية (٢)  
 من ١، ٢ ينتج أن:  
 $ق (أ ه د) = ق (ج د)$

ونلاحظ أن أ ه د زاوية خارجة، ج ه هي المقابلة للمجاورة  
 ∴ الشكل د ه ب ج رباعي دائري

٧

أ ب ج د مثلث مرسوم داخل دائرة  
 د ب مماس للدائرة عند ب  
 $س ن \parallel ب د$   
 اثبت أن:  
 أ س ص ج رباعي دائري

الحل

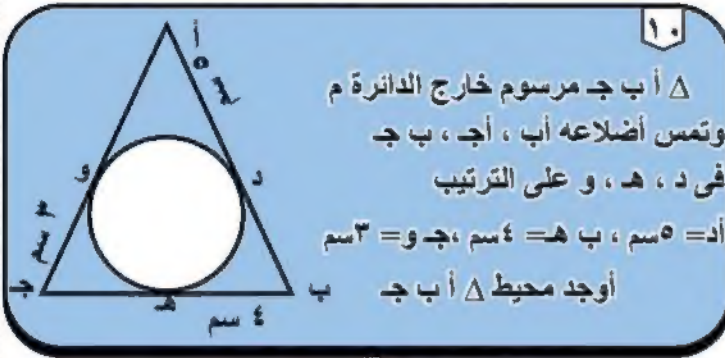
∵  $س ن \parallel ب د$   
 ∴  $ق (أ ب د) = ق (ص س ب)$  بالتبادل (١)  
 ∴  $ق (أ ب د) = ق (ج د)$  بالمماسية (٢)  
 من ١، ٢ ينتج أن:  
 $ق (ص س ب) = ق (ج د)$   
 أي أن: قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة  
 ∴ الشكل أ س ص ج رباعي دائري

٨

أ ب ج د مماس للدائرة عند ب  
 ه منتصف ب و  
 اثبت أن:  
 أ ب ج د رباعي دائري

الحل

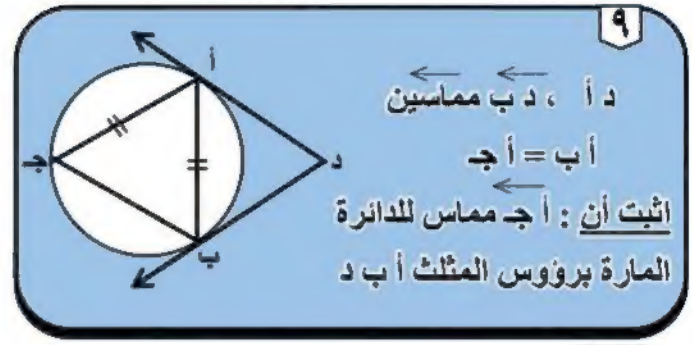
∴  $ق (ب ه د) = ق (ه و د)$   
 ∴  $ق (ب أ ه) = ق (ه أ و)$  (١)  
 ∴  $ق (ب أ ه) = ق (ج د ه)$  بالمماسية (٢)  
 من ١، ٢ ينتج أن:  
 $ق (ج د ه) = ق (ه أ و)$   
 وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي ج د  
 وفي جهة واحدة منها  
 ∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري



الحل

∴  $\overline{AD}$ ،  $\overline{AO}$  قطعتان مماستان ∴  $\overline{AD} = \overline{AO} = 5$  سم  
 ∴  $\overline{BD}$ ،  $\overline{BE}$  قطعتان مماستان ∴  $\overline{BD} = \overline{BE} = 4$  سم  
 ∴  $\overline{CE}$ ،  $\overline{CF}$  قطعتان مماستان ∴  $\overline{CE} = \overline{CF} = 3$  سم  
 ∴  $\overline{AB} = 5 + 4 = 9$  سم ،  $\overline{AC} = 5 + 3 = 8$  سم  
 ∴  $\overline{BC} = 4 + 3 = 7$  سم  
 ∴ محيط  $\triangle ABC = 7 + 8 + 9 = 24$  سم

نصحه  
معلم اول رياضيات



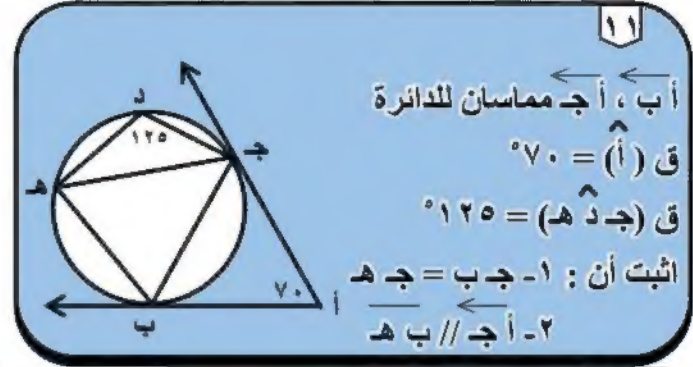
الحل

في  $\triangle ABC$  ∴  $\overline{AB} = \overline{AC}$   
 ∴  $\angle C = \angle B$  (زاوية في مثلث)  
 في  $\triangle ADE$  ∴  $\overline{AD} = \overline{AE}$  لأنهما قطعتان مماستان  
 ∴  $\angle E = \angle D$  (زاوية في مثلث)  
 ∴  $\angle C = \angle E$  (زاوية خارجية = زاوية محيطية)  
 من ١، ٢، ٣ وبمقارنة المثلثين ينتج أن:  
 $\angle C = \angle E$  (زاوية في مثلث)  
 ∴ مماس للدائرة المارة بـ  $O$  المثلث  $ABC$



الحل

∴  $\overline{AB} = \overline{AC}$  قطعتان مماستان للدائرة الصغرى  
 ∴  $\overline{AB} = 15$  سم ∴  $\overline{AC} = 3$  سم ∴  $\overline{BC} = 18$  سم  
 ∴  $\overline{AD} = \overline{AE} = 3$  سم  
 ∴  $\overline{AB} = \overline{AC}$  قطعتان مماستان للدائرة الكبرى  
 ∴  $\overline{AD} = \overline{AE} = 3$  سم ∴  $\overline{DE} = 17$  سم



الحل

∴ الشكل  $ABDC$  رباعي دائري  
 ∴  $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$   
 ∴  $\overline{AB}$ ،  $\overline{AC}$  قطعتان مماستان  
 ∴  $\angle B = \angle C$  (زاوية في مثلث)  
 ∴  $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ$   
 ∴  $\angle BDC = 110^\circ$  (زاوية محيطية = زاوية خارجية)  
 من ١، ٢ ينتج أن:  $\angle B = \angle C$  (زاوية في مثلث)  
 ∴  $\triangle ABC$  متساوي الساقين ∴  $\overline{AB} = \overline{AC}$  أولاً  
 ∴  $\angle B = \angle C = 35^\circ$   
 وهما متبادلتان ∴  $\overline{AB} \parallel \overline{AC}$